1893. ANNALEN № 5.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND 49.

1. *Ueber electrische Entladungen: Erzeugung electrischer Oscillationen und die Beziehung von Entladungsröhren zu denselben;*
von H. Ebert und E. Wiedemann.

(Fortsetzung und Schluss von Wied. Ann. 48. p. 591).

Wir haben in der vorigen Abhandlung (vgl. diese Annalen 48. p. 591) zunächst die Lage der Knoten auf den Leitungsdrähten in ihrer Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften des Drahtsystems untersucht und haben dabei die älteren Beobachtungen auf diesem Gebiete nach verschiedenen Richtungen ergänzen können. Die Theorie dieser Erscheinungen ergibt sich aus Betrachtungen über die geometrischen Eigenschaften des Leiterkreises ganz unabhängig von der angeregten Röhre.

Im folgenden Abschnitt wollen wir untersuchen, durch welche Eigenschaften des *Leiterkreises* die grössere oder kleinere Erregbarkeit einer gegebenen Entladungsröhre, sowie die Schärfe der in derselben auftretenden Lichterscheinungen bestimmt ist, falls die Röhre eine constante Lage dem Endcondensator gegenüber hat.

V. Specielle Bedingungen über das Zustandekommen wirksamer Resonanzschwingungen und das Leuchten von Entladungsröhren.

Einleitung.

Bei allen Betrachtungen über die Erregung eines Gases im Felde des Endcondensators haben wir zu unterscheiden zwischen *einer Entladung* im gewöhnlichen Sinne des Wortes — dieselbe umfasst alle Phänomene, welche durch *einen* primären Funken hervorgerufen werden — und *einer Oscillation,* von der eine um so grössere Anzahl auf *eine* Entladung geht, je geringer die Dämpfung im Leiterkreise ist.

Die Beziehungen des Leiterkreises zu der angeregten Röhre werden hauptsächlich durch zwei Grössen bestimmt, die fast unabhängig von einander die Leuchterscheinungen in dem Felde an dem Endcondensator bestimmen.

Einmal kommen in Betracht die maximalen Werthe, zwischen denen das Potential der Platten des Endcondensators schwankt, kurz die *Amplitude der Potentialschwankungen.* Sinkt diese unter einen bestimmten Werth, so hört das Leuchten auf, indess ist dieser Werth sehr klein.

Andererseits ist von Bedeutung die Schnelligkeit des Abklingens der Oscillationen, die sogenannte *Dämpfung.* Diese zweite Grösse, die Dämpfung ist, wie wir sehen werden, für die Deutlichkeit der Erscheinungen bei den Gasentladungen von principieller Wichtigkeit. Je kleiner die Dämpfung ist, d. h. je öfter sich die Potentialschwankungen an den Endcondensatorplatten für die durch jeden einzelnen Funken des primären Condensators angeregten Oscillationen wiederholen, um so heller und um so schärfer ausgeprägt sind alle Phänomene.

Eine wichtige Rolle spielt ferner auch die Zahl der erregenden primären Funken in der Zeiteinheit; darauf kommen wir am Schluss zu sprechen.

Da wir im Folgenden in Bezug auf die Dämpfung öfters auf die Theorie der Schwingungen in unserem resonirenden Drahtkreise zurückgreifen müssen, wollen wir hier das Nöthigste darüber kurz recapituliren. Wir legen dabei die Darstellung des Hrn. V. Bjerknes[1]) zu Grunde.

Das Potential φ, bis zu welchem zu den Zeiten t die Platten des Endcondensators geladen sind, wird dargestellt durch die Differentialgleichung eines gedämpften Pendels von der Periode b, welches durch eine periodische Kraft von der Periode a erregt wird; da b und a im allgemeinen nicht gleich und auch nicht einfache Multipla von einander sind (s. weiter u.), so haben wir es mit dem Vorgang einer „erzwungenen“ Schwingung zu thun. Ist β das Dämpfungsverhältniss im secundären Kreis, sind $\mathfrak{A}$ und α Amplitude und Dämpfungsverhältniss der Schwingungen im primären Kreise, so ist die Gleichung der erzwungenen secundären Schwingungen

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 74. 1891.

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + 2 \beta \frac{d \varphi}{d t} + (b^2 + \beta^2) \varphi = \mathfrak{A} e^{-\alpha t} \cos a t,$$

zu der die Integralgleichung

$$\varphi = A e^{-\alpha t} \sin (a t + a') + B e^{-\beta t} \sin (b t + b')$$

gehört. (B Amplitude der Potentialschwankungen am Endcondensator, a' und b' die Phasen der dem primären, bezw. dem secundären Kreise entsprechenden Impulse am Endcondensator).

Die dem primären Kreise entsprechenden Schwingungen von der Periode a, welche dem secundären Kreise, dessen Eigenschwingung die Periode b hat, aufgezwungen werden, klingen relativ sehr rasch ab, da ihr Dämpfungsverhältniss α sehr gross ist im Vergleich zu β. Schon nach sehr kurzer Zeit werden daher die Potentialschwankungen an den Platten des Endcondensators durch den Ausdruck

$$\varphi = B e^{-\beta t} \sin (b t + b')$$

dargestellt. Die Amplitude B ist etwas vereinfacht

$$B = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 + 2 \alpha^2 (b^2 + a^2)}}$$

wobei α^2 neben a^2 oder b^2 als klein angesehen werden darf.

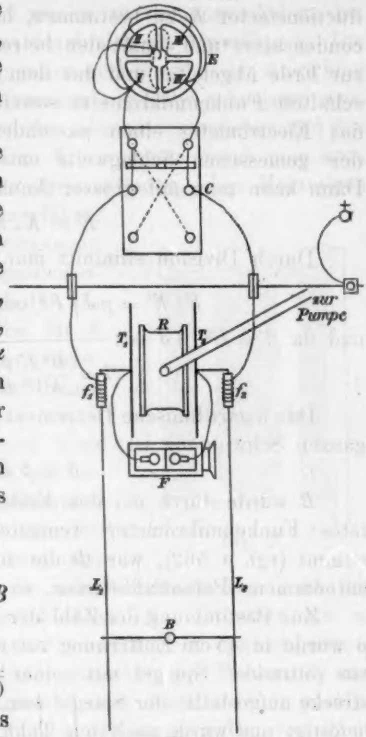


Fig. 1.

Zur Messung der Dämpfung war am Endcondensator ein Electrometer angebracht. Die Anordnung ist aus Fig. 1 ersichtlich (vgl. Wied. Ann. 48. p. 562). Der Impuls J, den das Electrometer bei dem jeder Entladung zugehörigen Schwingungscomplexe erfährt, ist

$$J = \int_0^\infty \varphi^2 \, d t = B^2 / 4 \beta .$$

Erfolgen p Entladungen in der Secunde, so wird der Ausschlag

$$E = K . p J,$$

da die Entladungszahl p immer sehr gross ist im Vergleich zur Schwingungszahl der Electrometernadel. Um den Reductionsfactor K zu bestimmen, haben wir eine Seite des Endcondensators und damit den betreffenden Lecher'schen Draht zur Erde abgeleitet und das dem Endcondensator parallel geschaltete Funkenmikrometer soweit znsammengeschraubt, dass das Electrometer einen passenden Ausschlag E' gab. Das der gemessenen Schlagweite entsprechende Potential sei V. Dann kann man mit grosser Annäherung setzen:

$$E' = K . V^2.$$

Durch Division eliminirt man K und erhält:

$$E / E' = p J / V^2 \text{ oder } J = \frac{E V^2}{E' p}$$

und da $\beta = B^2 / 4 J$ ist:

$$\beta = \frac{B^2 E' p}{4 V^2 E}.$$

Das logarithmische Decrement ist, wenn T die Dauer einer ganzen Schwingung ist,

$$\delta = \beta T.$$

B wurde durch ein dem Endcondensator parallel geschaltetes Funkenmikrometer wenigstens angenähert genau bestimmt (vgl. p. 562); war Φ die aus der Paschen'schen Tafel entnommene Potentialdifferenz, so war $B = \frac{1}{2} \Phi$.

Zur Bestimmung der Zahl der Entladungen in der Secunde p wurde in 45 cm Entfernung von der primären Funkenstrecke ein rotirender Spiegel mit seiner Axe parallel der Funkenstrecke aufgestellt; der Spiegel war auf der Centrifugalmaschine befestigt und wurde nach dem Takt des Metronoms in constante Umdrehung versetzt. Aus dem Abstande der auf einer ebenfalls 45 cm von der Funkenstrecke entfernten Centimeterscala sich projicirenden Entladungsbilder wurde die Zeit zwischen zwei Entladungen und damit p bestimmt.

Die Production der Maschine war nicht gleich gross für beide Electricitäten; daher lud sich das ganze System allmählich bis auf ein bestimmtes Potential. Bei den Electrometerablesungen wurde daher in folgender Weise verfahren:

Zuerst wurden die Kugeln an der Maschine einander bis zur Berührung genähert, so dass keine Oscillationen zu Stande kamen. Das Electrometer zeigte eine gewisse Anfangslage i_0. Dann wurden für kurze Zeit die Kugeln auseinander gezogen; das Electrometer zeigte sehr bald einen constanten Ausschlag i_1. Hierauf wurden die Kugeln wieder zusammengeschoben, bei C Fig. 1 wurde commutirt; es ergab sich ein Ausschlag i_2. Die Kugeln wurden wieder auseinander gezogen und der Ausschlag i_3 abgelesen, sowie das Electrometer zur Ruhe gekommen war. Hierauf wurden die Kugeln wieder zusammengeschoben und das ganze Drahtsystem sammt dem Electrometer durch eine kurz dauernde Verbindung mit der Erde entladen. Die Messungen wurden möglichst schnell ausgeführt; bei längerer Wirkung der Schwingungen machen sich dauernde Ladungserscheinungen störend geltend. Die im folgenden mitgetheilten Werthe für E (bezw. E') sind die Mittel einer grösseren Anzahl zusammengehöriger Paare der Differenzen $i_3 - i_2$ und $i_1 - i_0$.

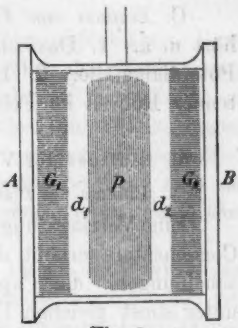


Fig. 2.

Bei allen Beobachtungen über die Leuchterscheinungen, die ein verdünntes Gas unter dem Einfluss der Oscillationen von nicht zu hohem Potential zeigt, tritt eine ganz besonders typische Erscheinung auf, die selbstverständlich je nach der Lage der Röhren eine verschiedene ist. Ist etwa ein an beiden Enden durch Glasplatten A und B (Fig. 2) geschlossener passend evacuirter Glascylinder zwischen die Platten T_1 und T_2 des Endcondensators so gestellt, dass A und B ihnen parallel und nahe stehen, sie aber nicht berühren, so gehen von ihnen blaue Glimmlichtstrahlen G_1 G_2 (nicht Kathodenstrahlen) aus, die durch dunkle Räume d_1 d_2 von dem in der Mitte des Rohres befindlichen rothen Lichte p, das man dem gewöhnlichen sogenannten positiven Lichte parallel stellen kann, getrennt sind.[1])

Für die Anregung der Röhre im Leiterkreise kommen nach den Versuchen folgende Punkte in Betracht:

1) Wir kommen auf die genaue Betrachtung des Phänomens später zurück.

A. *Einfluss der Vorgänge am primären Condensator*, dahin gehören: 1. Der Abstand der Platten des primären Condensators. 2. Die Höhe des Potentiales in der primären Funkenstrecke, d. h. deren Länge bei gegebener Grösse der Kugeln. 3. Die Beschaffenheit der primären Funkenstrecke. 4. Die Zahl der Entladungen in der primären Funkenstrecke.

B. *Einfluss der Art der Ueberbrückung.* Dahin gehört: 1. Der Einfluss einer metallischen Verbindung überhaupt in der Nähe des primären Condensators auf die Vorgänge in diesem selbst. 2. Die besonderen Eigenschaften des Systems mit *einem* Knoten. 3. Einfluss der Zahl und Lage der Brücken bei den mehrfachen Knotensystemen.

C. *Einfluss von Vorgängen am Endcondensator*, dahin gehört u. a.: 1. Das zum Anleuchten der Röhren erforderliche Potentialgefälle. 2. Einfluss der Gegenwart anderer leuchtender Röhren im Felde neben der untersuchten.

A. Einfluss der Vorgänge am primären Condensator.

1. Einfluss des Plattenabstandes am primären Condensator.

Eine Verringerung des Abstandes der Platten des primären Condensators erhöht die Deutlichkeit und Helligkeit der Erscheinungen; die Capacität wird vergrössert und demnach unter sonst gleichen Umständen auch die Zahl der bei jeder Einzelentladung des primären Condensators auftretenden Oscillationen. Bei den Bestimmungen der Dämpfung haben wir die primären Platten möglichst weit von den secundären (bis $\varepsilon_1 = 6,7$ cm) aufgestellt, weil sonst trotz der Isolierung der Plattenränder (Wied. Ann. 48. p. 556) und möglichster Fernhaltung aller Staubtheilchen und Feuchtigkeit auf den die Platten tragenden Glasplatten und den verbindenden Hartgummistäben nicht zu vermeiden war, dass Electricität von den primären Platten auf die secundären überging, wodurch das ganze System der Lecher'schen Drähte stark geladen wurde, was bei den Electrometermessungen sehr störend werden konnte.

2. Einfluss des Potentials der primären Funkenstrecke.

Unsere Versuche haben ergeben, dass die Höhe der Potentiale von relativ kleinerem Einfluss ist; ja im Gegentheil wurden bei Erhöhung der Entladungspotentiale bei Entfernung der

Kugeln des primären Condensators in vielen Fällen die Erscheinungen undeutlicher.

3. Einfluss der Natur der primären Funkenstrecke.

Um die Oscillationen in den secundären Leitern scharf ausgeprägt zu erhalten, ja um überhaupt Resonanzschwingungen beobachten zu können, müssen bekanntlich die Funken am primären Condensator knatternde, scharf abgebrochene sein.

Alles, was die Plötzlichkeit der Entladung vermindert, verschlechtert ihre Fähigkeit Entladungsröhren zum Leuchten zu bringen, bez. *Resonanzschwingungen* überhaupt hervorzurufen, was die Plötzlichkeit dagegen steigert, erhöht auch diese Fähigkeit.

Es galt zunächst diese Erscheinung aufzuklären, ihren Grund näher festzustellen und damit über den Mechanismus des ganzen Entladungsvorganges überhaupt mehr Licht zu verbreiten. Wir werden für eine Reihe von Fällen zeigen, *dass, sobald die Dämpfung der Schwingungen im secundären Kreise wächst, die Erscheinungen undeutlich werden, dass dagegen, sobald sie abnimmt, die Erscheinungen an Deutlichkeit zunehmen.*

Die Ursache für den Einfluss der Dauer des Funkens auf die Deutlichkeit ist folgende: In den knatternden Funken gibt die Gesammtentladung nur zu wenigen primären Oscillationen Veranlassung, während bei den nicht knatternden Funken jede einzelne Entladung lange anhält und viele Oscillationen hervorruft, über die sich noch Oscillationen höherer Ordnung lagern, die den einzelnen Theilen des Leitersystems entsprechen. Letztere haben andere Schwingungsdauer, wie die Hauptoscillationen, auch sind sie in den Phasen gegen die erste Oscillation verschoben. Jede einzelne dieser Oscillationen ruft Resonanzschwingungen hervor, deren Schwingungsdauer nur von dem Bau der secundären Kreise abhängt, aber es sind dies Resonanzschwingungen von Oscillationen verschiedener Phasen, die einander stören und die Dämpfung vergrössern.

Wir untersuchen nach einander den Einfluss verschiedener Bedingungen in dieser Richtung.

α) Einfluss der Electricitätsquelle.

Die Zufuhr der Electricität von dem Innern der *Influenzmaschine* zu den primären Platten erfolgt verhältnissmässig langsam im Vergleich zum Entladungsvorgange in der primären Funkenstrecke, falls dessen Dauer nicht durch losgerissene Theilchen etc. verlängert wird. In einer Entladung geht also fast nur die Electricitätsmenge über, welche auf den Platten des primären Condensators angehäuft ist: die Entladung dauert nur sehr kurze Zeit an, die Phänomene sind sehr deutlich.

Weit weniger als die Influenzmaschine eignet sich das *Inductorium* für diese Versuche.

Wir haben gelegentlich auch die Versuche mit einem Inductorium von mittlerer Grösse (12 cm Funkenweite) und einem sehr grossen Inductorium von Carpentier (45 cm Funkenweite) angestellt; dabei ergab sich, dass die Felderregungen zwischen den Platten des Endcondensators nicht diejenige Stetigkeit und Regelmässigkeit haben, welche zum Studium der Entladungsvorgänge in gasverdünnten Räumen unbedingt nothwendig ist. Es ist dadurch wiederum die schon früher von dem einen von uns vertretene Ansicht bestätigt worden, dass die Influenzmaschine vor dem Inductorium für Versuche auf dem Gebiete der Entladungen grosse Vorzüge hat.

Die Verwendung der Influenzmaschine dürfte für gewisse Fälle auch insofern den Vorzug verdienen, als man bei der Berechnung der Selbstinduction und der Capacität des primären Oscillators und damit seiner Schwingungsdauer nicht auf das theoretische Bedenken stösst, wie man beim Inductorium die mit den primären Leitern dauernd verbundenen Windungen des Inductoriums mit ihrer Selbstinduction und Capacität in Rechnung setzen soll. H. Poincaré bemüht sich zu zeigen, dass man das Inductorium gerade wegen seiner hohen Selbstinduction und grossen Capacität gegenüber dem Oscillator vernachlässigen kann. Uns scheint es, als ob man nicht ganz so, wie es H. Poincaré thut, hierbei schliessen dürfe. H. Poincaré's Betrachtungen (Poincaré, Electricité et Optique II p. 160 f. 1891) kommen darauf hinaus zu zeigen, dass der Spannungsausgleich durch die ganze Spirale hindurch während der Dauer der Os-

cillationen der primären Strecke verschwindend klein ist, diese sich zur Inductionsspirale also verhält wie ein kurzes Pendel von geringer Masse mit schnellen Schwingungen zu einem sehr langen Pendel mit grosser Masse, an welches es angehängt ist. Nun ist freilich richtig, dass man das Inductorium, nachdem der Ausgleich in Gestalt eines Funkens stattgefunden hat, für die folgende kurze Dauer der Oscillationen, als *Ganzes* betrachtet als stromlos ansehen kann, die Erfahrung lehrt aber, dass es gerade die den Enden nächsten Theile der Spirale sind, von denen fortwährend noch Electricität nachfliesst. So lange man also nicht weiss, aus welcher Tiefe der Inductionsspirale während der Oscillationen noch Electricität nach der primären Funkenstrecke hinfliesst, wie viele von den Windungen man also eigentlich noch zum Leitersystem der primären Strecke zu rechnen habe, scheint uns eine Berechnung der Capacität des primären Oscillators, welche nur die Plattengrösse, Drahtlänge und Kugelgrösse derselben in Betracht zieht, von theoretischen Bedenken nicht ganz frei zu sein.

Wenn trotzdem zahlreiche Forscher Resultate bei Anwendung des Inductoriums erhalten haben, so mussten sie sich durch besondere Maassnahmen knatternde Funken von kurzer Dauer erzeugen.

β) Einfluss des Rauhwerdens der Kugeln und der Zerstäubung derselben.

Verschlechtert wird das Auftreten des Leuchtens durch die Verunreinigung der Kugeln des primären Condensators durch Staub, das Rauhwerden derselben bei fortgesetztem Gebrauch, und die Anhäufung von losgerissenen Staubtheilchen in der Luft. Alle diese Factoren befördern mehr oder weniger das Auftreten von Nachentladungen und ein Ausströmen von Electricität bei niedrigeren Potentialen als dem Abstand der Kugeln entspricht, wenn einmal eine Entladung eingetreten ist, und zwar von Electricität, die bei dem Inductorium aus den tiefer gelegenen Theilen desselben nachströmt, bei der Influenzmaschine aber von den Platten kommt; nur dass bei letzterer die Menge der nachströmenden Electricität weit kleiner ist.

Bei der Discussion der Entladungserscheinungen in Luft von Atmosphärendruck, bei der Besprechung der Aureole etc. werden wir hierauf eingehender zurückzukommen haben.

Will man in diesem Falle scharfe Erscheinungen erhalten, so muss man mit Hrn. Töpler zwischen Maschine und den Kugeln des primären Condensators *feuchte Schnüre* einschalten. Wir brauchten dies nicht zu thun, wahrscheinlich weil seine Kugeln leichter corrodirt wurden, als unsere mit Platinhauben versehenen. Ebenso erklärt sich auch, warum man reinere Resultate bei der Anwendung des Inductoriums erhält, wenn man zur Zuleitung schlechte Leiter (feuchte Schnüre, mit verdünnter Schwefelsäure gefüllte Capillaren oder dergl. verwendet).[1] Dieselben verhindern das zu schnelle Nachströmen von Electricität und damit eine gegenseitige Störung der einzelnen Erregungen.

γ) Einfluss des Durchblasens eines Luftstromes zwischen den Kugeln.

Ebenso wie feuchte Schnüre wirkt nach Classen ein Durchblasen eines Luftstromes zwischen den beiden Kugeln; dadurch wird der losgerissene und zwischen den Kugeln befindliche Metallstaub fortgeführt. Dass in einzelnen Fällen hierbei von einigen Beobachtern eine Verschlechterung der Resonanz beobachtet worden ist, liegt wohl an der verschiedenen Art des Blasens; ein feuchter und ein trockener Luftstrom werden sich verschieden verhalten etc. Dieser Unterschied wird bei Betrachtung der Entladungen bei höheren Drucken genauer zu untersuchen sein.

δ) Einfluss des Mediums, in dem die primären Funken überspringen.

1. Dielectricum: Paraffinöl.

Während alles, was die Dauer der Funken in der primären Funkenstrecke verlängert, die Anregbarkeit von Röhren herabsetzt, so muss dadurch, dass die Plötzlichkeit der Entladung vermehrt wird, die Deutlichkeit der Erscheinungen gesteigert werden, so z. B. dadurch, dass man an Stelle der Luft ein anderes Dielectrium von grösserer dielectrischer Starrheit setzt. Dies bestätigt der Versuch. Wird an Stelle der primären Funkenstrecke ein Gefäss gesetzt, in welches die Kugeln des Hauptcondensators beiderseitig durch die Gefässwand eingeführt sind und füllt man das Gefäss mit einem gut isolirenden Mittel, etwa Paraffinöl, so erhält man sehr heftig knatternde, scharf

1) Vgl. z. B. Töpler, Wied. Ann. **46.** p. 306. 464 u. 642. 1892.

abreissende Funken. Die Leuchterscheinungen im secundären Kreise werden besonders schön.[1]) Die Maximalamplitude B (vergl. p. 3) der Spannungen am Ende der secundären Leitung ist bedeutend grösser und die Dämpfung ergibt sich im Resonanzkreise viel geringer, als wenn sich die Funken in Luft bilden. Hier tritt nach jeder Hauptentladung das Dielectricum zwischen die Kugeln und verhindert ein Nachströmen von Electricität und damit das Zustandekommen der störenden Nebenerregungen im secundären Kreise. Ein weiterer Vortheil dieser Anordnung besteht darin, dass das Kugelmaterial nicht so heftig angegriffen wird, als wenn die Entladung in der Luft vor sich geht.

Als Beispiel führen wir Zahlen an, welche mit den p. 22 gegebenen unmittelbar vergleichbar sind.

Eine Brücke ($k_0{}^0$): $E = 4{,}5$; $B = 4{,}4$, alles Andere nahezu wie unten. Das logarithmische Decrement δ ergibt sich hier etwa zwölfmal kleiner als dort, wo die Entladung in Luft erfolgte.

2. Dielectricum: Verdünntes Gas.

Vor allem interessant war es ein verdünntes leuchtendes Gas zu untersuchen, bei welchem, wie weiter unten noch genauer ausgeführt werden wird, die durch eine Oscillation angeregten Bewegungen andauern während Zeiten, die schon commensurabel werden mit der Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schwingungen (sie dauern also ca. 10^{-8} Sec.). Zu den Versuchen wurde folgende Anordnung getroffen. Die beiderseitig tubulirte Glaskugel A Fig. 3 (s. f. S.) enthielt eine Funkenstreke, welche durch mehr oder weniger weites Herausziehen der Zuführungsdrähte durch die Kautschuckstopfen S_1 und S_2 verschieden lang gemacht werden konnte. Da nicht bis zu sehr niedrigen Drucken evacuirt wurde, genügte der Verschluss durch die Stopfen. Dieser Raum stand mit einem Manometer und einer Luftpumpe in Verbindung. Ihm parallel war eine Funkenstrecke F geschaltet. Die Verbindungen einerseits nach der

---

1) Die Herren Ed. Sarasin und De la Rive haben (Arch. de Genève (3) **28.** p. 306. 1892) gezeigt, dass auch die Interferenzfähigkeit der Wellen, die von einem mit einer solchen Funkenstrecke versehenen Hauptcondensator geliefert werden, erheblich gesteigert ist.

Maschine hin, andererseits nach dem primären Condensator waren wie aus der Figur ersichtlich getroffen. Wurde bei höheren Drucken und ca. 2—3 cm langer Funkenstrecke in *A* Electricität zugeführt, so ging die Entladung nur zwischen *F* über, wo bei einer Funkenstrecke von 4 mm das Potential bis auf ca. 28 electrostatische Einheiten = 8400 Volt gesteigert wurde. Die Erscheinungen in einem ziemlich weit evacuirten, weiten, mit Metallplatten geschlossenen, an Stelle des Endcondensators angehängten Glascylinder waren die „typischen". Nun wurde *A* sucessive ausgepumt. In dem Momente, wo sich die Ladungen

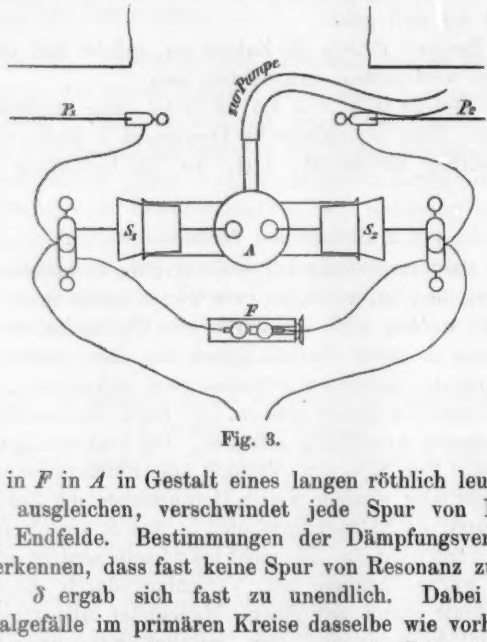


Fig. 3.

anstatt in *F* in *A* in Gestalt eines langen röthlich leuchtenden Fadens ausgleichen, verschwindet jede Spur von Leuchten in dem Endfelde. Bestimmungen der Dämpfungsverhältnisse lassen erkennen, dass fast keine Spur von Resonanz zu Stande kommt. δ ergab sich fast zu unendlich. Dabei ist das Potentialgefälle im primären Kreise dasselbe wie vorher. Das leuchtende Gas verhält sich also „wie ein Leiter". Damit soll durchaus nicht gesagt sein, dass es zu einem wirklichen Leiter geworden ist; die Erscheinung erklärt sich vielmehr vollkommen aus der Annahme, dass sich hier über die Wirkung des ersten Stadiums der Entladung sofort die in der Phase gegen sie verschobenen Wirkungen späterer Stadien lagern.

3. **Primäre Funkenstrecke durch eine Geissler'sche Röhre ersetzt.**

Schaltet man bei *A* eine Geissler'sche Röhre ein, so hört ebenfalls jede Resonanz auf, so wie die Entladung statt durch die Luftstrecke *F* durch diese hindurchgeht. Dabei ist offenbar der Potentialunterschied an den Enden der Röhre gerade so hoch wie vorher an den durch Luft von Atmosphärendruck getrennten Kugeln. Hier kommt zu der Wirkung des leuchtenden Gases noch die specifische Wirkung des Entladungsrohres hinzu, das sich selbst wieder wie ein Condensator verhält (vgl. spätere Abhandlungen). Zu der Grundschwingung des Hauptcondensators gesellen sich dann immer noch die Eigenschwingungen der Röhre, wodurch die Resonanzschwingungen vollkommen gestört werden.

e) **Einfluss der Belichtung der primären Funkenstrecke durch ultraviolettes Licht.**

Zu den das Zustandekommen kräftiger Resonanzerscheinungen störenden Einflüssen gehört in ganz hervorragendem Maasse die Bestrahlung der primären Funkenstrecke mit ultraviolettem Lichte. Hr. H. Hertz wurde schon bei seinen ersten Versuchen auf den Umstand aufmerksam, dass er nur schwache Funken in einem resonirenden Drahtkreis erhielt, wenn die beiden Funkenstrecken von einander aus gesehen werden konnten; es zeigte sich, dass das bei der Entladung auftretende ultraviolette Licht die Ursache ist.

Wir haben näher untersucht, worauf diese eigenthümliche Wirkung des ultravioletten Lichtes beruht und gefunden, dass sie in einer ungeheuer vermehrten Dämpfung der Schwingungen im secundären Kreis ihren Grund hat. Die zahlreichen Versuche wurden nach folgendem Schema angestellt: Parallel zu der primären Funkenstrecke war durch möglichst kurze Verbindungsstücke (damit nicht die *mehrfachen* Hauptknoten störend auftraten, vgl. Wied. Ann. 48. p. 581) eine zweite Funkenstrecke mit nahe gleich grossen Kugeln geschaltet, deren Länge mikrometrisch gemessen werden konnte. Am Ende der secundären Leitung war eine lange, weite, mit Metallplatten verschlossene Glasröhre direct angeschlossen, die soweit evacuirt wurde, dass sie möglichst empfindlich war. Die Brücke wurde nahe der Mitte der Lecher'schen Drähte aufgelegt und zwar an die

Stelle, welche der „typischen Erscheinung“ (vgl. p. 5) entsprach. Durch Flaschen war, wie oben Wied. Ann. 48. p. 563 angegeben, das Electrometer angeschlossen.

Es wurde zunächst bei unbelichteter primärer Funkenstrecke die Brücke möglichst genau eingestellt und durch Verkleinern der Parallelfunkenstrecke bis zum Einsetzen der Funken das Potential mit Hülfe der Paschen'schen Tafel bestimmt. Nun wurde auf die Stelle der negativen Kugel, von der die Entladung ausging[1]), das Licht einer electrischen Bogenlampe mittels einer Quarzlinse concentrirt. Sofort ändert das Entladungsgeräusch seinen Charakter, die Röhre am Ende leuchtete nur noch sehr matt. Die Brücke lag noch immer an der Stelle grösster Resonanz, wovon man sich durch Hin- und Herschieben derselben leicht überzeugen konnte. Durch die Belichtung wird also nichts an der Periode der Schwingungen geändert (*b* blieb noch immer nahezu gleich *a*).

Durch Verkleinern der Parallelfunkenstrecke wurde auf's Neue das Potential bestimmt. Es ergaben sich Potentialerniedrigungen z. B. von 22 auf 16, also um 6 Electroden *E* (1800 Volt). Ferner wurde die Dämpfung im secundären Kreise bestimmt. Nun wurde das Licht abgesperrt und die primäre Funkenstrecke soweit verkleinert, dass jetzt ohne Licht die Funken in ihr bei *demselben* niedrigen Potential (in unserem Beispiele bei 16) übergingen. Da die Maschine immer die gleiche Electricitätsmenge lieferte, so war sowohl das Potential wie alles andere, z. B. auch die Zahl der Entladungen, dieselbe wie früher. Dennoch leuchtete die Röhre am Ende weit heller und eine Bestimmung der Dämpfung ergab jetzt ein etwa zehn- bis zwölfmal kleineres logarithmisches Decrement als vorher bei Belichtung der Funkenstrecke und demselben Potential. Dass also bei belichteter primärer Funkenstrecke weder ein deutliches Leuchten, noch überhaupt ein kräftiges Ansprechen eines auf Resonanz abgestimmten secundären Kreises eintritt, liegt vor allem an der Vermehrung der Dämpfung im secundären Kreis, die der Wirkung des ultravioletten Lichtes auf die empfindliche Kathodenstelle eigenthümlich ist.

Diese störende Wirkung des ultravioletten Lichtes ist

1) Vgl. E. Wiedemann u. H. Ebert, Wied. Ann. **33.** p. 241. 1888.

wohl hauptsächlich dadurch bedingt, dass durch das Licht das Material der Kugeln zerstäubt wird. Dann befinden sich in der Funkenstrecke einzelne leitende Theilchen, zwischen denen sich Partialentladungen ausbilden können, zu denen Entladungen von den Kugeln aus übergehen etc.

4. Einfluss der Zahl der Entladungen in der primären Funkenstrecke.

Je grösser die Zahl der Entladungen im primären Condensator ist, um so günstiger ist dies für das Leuchten. Erscheinungen, die bei grosser Funkenstrecke und kleiner Anzahl von Entladungen undeutlich waren, wurden deutlich, sobald man die Funkenstrecke verkleinerte, wodurch zugleich die Entladungszahl vergrössert wurde. Auch wurden bei vergrösserter Entladungszahl durch schnellere Umdrehung der Maschine bei constantem Potential die Erscheinungen immer deutlicher.

B. Einfluss der Art der Ueberbrückungen auf die Anregbarkeit der Röhren und die Klarheit der Erscheinungen.

1. Einfluss einer metallischen Verbindung in der Nähe des primären Condensators auf die Art der primären Entladung.

Der metallisch an die secundären Platten S_1 und S_2 des primären Condensators angeschlossen und durch diese dem primären Entladungskreis gegenübergestellte, durch die Lecher'schen Drähte gebildete und durch Brücken begrenzte, secundäre Kreis übt eine *Rückwirkung* auf den primären Kreis aus.

Dies zeigt sich, wenn auf die vorher unüberbrückten Drähte an irgend einer Stelle, gleichviel ob diese einem Bauch oder einem Knoten entspricht, eine Brücke übergelegt wird; alsdann wird das Geräusch der primären Funken viel lauter. War es vorher nur ein unregelmässiges Geräusch, so stellt sich ein intensives scharfes Geknatter ein; dabei wird der Glanz der Funken lebhafter, meistens weisslicher, wenn vorher die Farbe mehr röthlich war.

Diese verstärkende Wirkung ist um so auffallender, je näher dem primären Condensator die Brücke aufgelegt wird.

Dabei ist es gleichgültig, ob ausser der dem primären Condensator nächstliegenden Brücke noch andere aufliegen, ob die Drähte hinten in einen Condensator auslaufen, oder blind endigen oder endlich zur Erde abgeleitet sind oder nicht.

Die Wirkung der Ueberbrückung macht sich bis auf Entfernungen der Brücke vom primären Condensator von 3—4 m bemerklich[1]). An jeder Brücke und natürlich auch an der ersten, wird ein Theil der von den Platten des primären Condensators in das Drahtsystem tretenden Energie wie an jeder Erweiterung oder Verengerung des Drahtsystems zurückgeworfen; indessen dürfte hierdurch die Wirkung nur zum Theil erklärbar sein. Offenbar spielt die Dauer der Funken eine wesentliche Rolle und das Phänomen lässt sich wohl folgendermassen am einfachsten erklären: Von der Maschine her fliesst der einen Platte, etwa P_1, verhältnissmässig langsam $+E$ zu, welche die Platte auf ein gewisses Potential $+V$ ladet, der anderen die entsprechende Quantität $-E$, wodurch diese auf das Potential $-V$ geladen wird. Wir wollen annehmen, die Lecher'schen Drähte seien zur Erde abgeleitet, also auf dem Potentialniveau Null. Ist dann C die Capacität je eines Plattenpaares, so ist

$$\pm E = C.(\pm V).$$

Auf den P_1 und P_2 gegenüberstehenden secundären Platten des primären Condensators S_1 und S_2 sind die Electricitätsmengen $-(1/n)E$ und $+(1/n)E$ aufgehäuft, wenn n die Bindungszahl der Condensatoren ist. Sowie das zur primären Entladung nöthige Potential erreicht ist, setzt ein Funke ein, in dem sich die Electricitätsmengen $+E$ und $-E$ ausgleichen, indem sie von den Platten P_1 und P_2 ab und in die Funkenstrecke hineinfliessen. Der ganze Vorgang und die Dauer des Funkenstromes ist so kurz, dass, wenn keine Brücke übergelegt ist, die bisher auf den secundären Platten S_1 und S_2 gebundenen Electricitäten $-(1/n)E$ und $+(1/n)E$ einfach durch die langen Drähte zur Erde abfliessen. Leiten wir die Drähte nicht zur Erde ab, so findet der Ausgleich doch erst so spät statt, dass eine eventuelle Rückwirkung erst an den Platten S_1 und S_2 ankommt, wenn der Funken zwischen P_1 und P_2 schon aufgehört hat. Legen wir aber

---

1) Hr. Josef Ritter v. Geitler-Armingen macht auch neuerdings auf diese Erscheinung aufmerksam, ohne einen bestimmten Grund für dieselben anzugeben; er vermuthet Reflexionserscheinungen an der Brücke. Inaug. Diss. Bonn p. 22 u. 23. 1893.

in nicht zu grosser Entfernung von dem primären Condensator eine Brücke über die Lecher'schen Drähte, schliessen also die beiden secundären Platten metallisch kurz, so trifft die von S_1 kommende negative Electricität die von S_2 kommende positive, noch ehe der Funke aufgehört hat. In Folge der Selbstinduction des Schliessungskreises (S_1 — Brücke — S_2), welche der in ihr sich bewegenden Electricität eine Art Trägheit verleiht, wird sogar ein Theil der von S_2 kommenden Electricität bis S_1 vordringen und eine Umladung herbei führen. Wird aber die Platte S_1 positiv geladen, so stösst sie den auf P_1 noch vorhandenen Rest positiver Electricität ab und treibt ihn mit gesteigerter Geschwindigkeit in die Kugeln der Funkenstrecke hinein; diese nach sehr kurzer Zeit erfolgende Umladung der Platten S_1 und S_2 unterstützt also das Abfliessen der Electricität von den Platten P_1 und P_2: die Funken werden kräftiger, heller, aber auch kürzer, daher knatternder und weisser. Daher ist es auch zur Erhaltung scharfer Erscheinungen so wichtig, am Endcondensator die ersten, dem primären Condensator zunächst gelegenen, Brücken des betreffenden Knotensystems überzulegen (vgl. p. 21).

Nach kurzer Zeit kehrt die Schwingung in dem Kreise (S_1 — Brücke — S_2) zwar ihre Richtung um, aber es scheint, als ob der Funken schon nach der ersten Vollschwingung vollständig erloschen ist; daher schadet die nächste Umladung, die wieder etwas — Electricität nach S_1, etwas + nach S_2 führt, nichts mehr. Wegen der raschen Dämpfung der Bewegung im Kreise (S_1 — Brücke — S_2) würde überhaupt die Höhe der Ladung nur einen Bruchtheil des vorhergehenden betragen, den unterstützenden Einfluss dieser also nur zum kleinsten Theile aufheben können.

Aus der Entfernung der Brücke, bis zu der die Wirkung beobachtet werden konnte, ergibt sich, dass die Dauer der „wirksamen“ primären Funken jedenfalls sehr kurz, vielleicht von der Ordnung 10^{-8} Sec. ist, wofür auch andere Anzeichen sprechen.

Die hier versuchte Erklärung wird auch durch die Beobachtung gestützt, dass weder die Zahl der Entladungen, noch das Potential V wesentlich geändert wird bei Auf- und Absetzen der Brücke innerhalb der wirksamen Entfernung. Ersteres

wurde mit Hülfe des rotirenden Spiegels, letzteres mit Hülfe einer parallel geschalteten Funkenstrecke festgestellt. Die Wirkung der Ueberbrückung kann also nur darin bestehen, dass der ganze Entladungsvorgang auf eine kürzere Zeit zusammengedrängt wird, dass der Ausgleich der aufgehäuften Electricitäten beschleunigt wird. In der That war der Einfluss der Brücke selbst ganz in der Nähe des primären Condensators weit kleiner, wenn die an sich sehr kurz dauernden Funken in Paraffinöl (vgl. p. 10) verwendet wurden.

Die Thatsache, dass eine weitere Verkürzung einer im Verhältniss zu allen Schallbewegungen so sehr kurzen Zeit, wie sie der Entladung entspricht, auf den Charakter des Schalles einen so grossen Einfluss hat, erklärt sich folgendermaassen: Die Stärke des Schalles ist einmal durch das Auseinandertreiben der Luft bei dem Auftreten des Funkens und zweitens durch das Wiederzusammenfallen derselben beim Aufhören des Funkens und die dadurch erzeugten Druckänderungen bedingt. Die Stärke des Schalles hängt also von der maximalen Temperatur in der Funkenstrecke ab. Dauert der Funke bei gegebener abfliessender Electricitätsmenge und gegebenem Potential eine verschieden lange, wenn auch nur kurze Zeit, so würde, falls keine Strahlung einträte, stets die Temperatur der Funkenbahn die gleiche sein und damit auch die Stärke des Knalles. Die Ausstrahlung der Gase ist aber bekanntlich ausnehmend gross; in Zeiten, die den Zeiten zwischen zwei Zusammenstössen[1]) der Molecüle vergleichbar sind, werden bereits sehr grosse Energiemengen abgegeben, also auch in Zeiten, die mit den Zeitdauern der Funken commensurabel sind. Infolgedessen können bei gleicher bewegter Electricitätsmenge länger andauernde Funken die Luft nicht so hoch erhitzen wie kürzere, selbst wenn die Dauer derselben etwa von der Ordnung 10^{-8} Sec. ist; dann wird aber die Stärke des Schalles wesentlich herabgesetzt.

Der Einfluss dieser Erscheinung auf die Entladungserscheinungen am Endcondensator ist der, dass bei den kurz dauernden Funken die Entladungsbilder heller und stetiger werden.

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37**. p. 233. 1889.

Für alle weiteren Studien, bei denen es uns auf möglichst stetige und reine Entladungsbilder im Felde des Endcondensators ankam und Knotensysteme mit mehreren Brücken benutzt wurden, war diese Erscheinung von grosser Wichtigkeit; wir haben sie benutzt und ausser der letzten Ueberbrückung eines Knotensystems, welche das Endfeld scharf abgrenzte, immer auch eine Ueberbrückung möglichst nahe an dem Hauptcondensator vorgenommen. Erst wenn die ersten und die letzten Brücken auflagen, war das Entladungsbild hell, die mittleren Brücken konnten eventuell fehlen.

2. Besondere Eigenschaften des Systems mit einem Knoten.

Die von uns als „typisch“ bezeichnete Erscheinung, die sich durch besondere Klarheit auszeichnet (vgl. p. 5), kommt immer nur dann deutlich zu Stande, wenn nur *eine* Brücke aufgelegt ist, und zwar auf einem bestimmten Punkt, den Knoten des Systems mit einem Knoten, der nahe der Mitte der Drahtbahn liegt.

In diesem Falle haben die zu beiden Seiten der Brücke liegenden Drahtkreise dieselbe Schwingungsdauer, sie schwingen Unisono. Die ausgesprochenste Wirkung tritt ein, wenn ausserdem die Schwingungsdauer des primären Kreises nahezu mit derjenigen des secundären übereinstimmt.

In der That ergibt die Theorie, dass alsdann die Amplitude der Potentialschwankungen B an den Platten des Endcondensators ein Maximum erreicht. Denn setzt man

$$b^2 = ha^2,$$

so wird der Ausdruck für B p. 3 ein Maximum, wenn

$$b^2(1-h)^2 + 2\alpha^2(1+h)$$

ein Minimum wird; dies tritt ein für $-2b^2 + 2b^2h + 2\alpha^2 = 0$ oder für

$$h = 1 - \frac{\alpha^2}{b^2}.$$

Nun ist (vgl. p. 3) α^2 klein gegen b^2, also erreicht B wirklich ein Maximum für eine Brückenlage, für die $h = 1$, also b gleich a ist.

Auch directe Messungen der Potentiale am Endcondensator, sei es durch parallel geschaltete Funkenstrecken, sei

2*

es mit Hülfe des Electrometers, ergaben, dass B in diesem Falle ein Maximum annimmt.

Die „typischen“ Erscheinungen treten also auf, wenn das maximale Potentialgefälle am Endcondensator von Platte zu Platte ein möglichst grosses ist.

Vor allem war aber in diesem Falle die Dämpfung ausserordentlich klein. So erhielten wir für ein Drahtsystem, für das war:

$$f_1 = 30 \times 30\,\text{cm}^2 \qquad L = 440\,\text{cm} \qquad r_2 = 10\,\text{cm}$$
$$\varepsilon_1 = 6{,}7\,\text{cm} \qquad b = 30 \;\text{„} \qquad \varepsilon_2 = 10 \;\text{„}$$
$$l = 13 \;\text{„} \qquad a = 0{,}05 \;\text{„}$$

die folgenden zusammengehörigen Werthe

$$B = 5\ \textit{Elst. E.} \qquad E' = 100\,\text{cm}$$
$$p = 300 \qquad T' = 556\,\text{cm}$$
$$E = 2\,\text{cm} \qquad T = \text{ca. } 4 \,.\, 10^{-8}$$
$$V = 5\ \textit{Elst. E.}$$

woraus sich ergibt $\beta = 3750$ und $\delta = 1{,}5 \times 10^{-4}$, also noch kleiner als der von Hrn. Bjerknes für seinen secundären, allerdings vom primären Kreise völlig losgetrennten Kreis erhaltene Werth 2×10^{-3} (a. a. O. p. 88).

In dem Falle, in dem die „typische“ Erscheinung auftritt, sind die Resonanzschwingungen demnach ausserordentlich wenig gedämpft. Nach ca. 6700 Schwingungen sind die Amplituden erst auf den 2,7ten Theil ihres Anfangswerthes, d. h. auf $1/e$ desselben herabgesunken.

3. Einfluss der Lage der Ueberbrückungen auf dem Lecher'schen Drahtsystem bei mehrknotigen Systemen.

In Betreff der *Art der Ueberbrückung* haben sich folgende allgemeine Resultate ergeben:

Eine Ueberbrückung lässt die Röhre viel heller erscheinen, als wenn keine solche vorhanden ist. Dies tritt besonders hervor, wenn man die Erscheinungen vergleicht, wenn keine Brücke überliegt und wenn man das System mit einem Knoten überbrückt. Auf die speciell hierbei eintretenden Erscheinungen werden wir bei der Beschreibung der Phänomene zurückkommen.

Beim Ueberbrücken der beiden Knoten des zweifachen Systemes findet stets ein weit helleres Leuchten statt, als wenn

nur eine Brücke übergelegt ist; dies liegt, wie schon erwähnt, an der geringeren Dämpfung der Schwingungen im letzteren Falle (vgl. w. u.).

Bei Ueberbrückung gewisser Knoten in der Mitte leuchtet das Rohr nur, wenn auch Knoten an den Enden überbrückt sind, so bei der Brückenlage k_3^1 nur, wenn auch k^3_3 überbrückt ist. Bei diesem System IV findet bei höheren Drucken ein Aufleuchten statt, wenn k_3^3 und k_3^0 überbrückt sind, sonst nicht.

Im System III leuchtet bei gewissen Drucken die Röhre, wenn alle drei Brücken aufliegen, sie leuchtet nicht, wenn eine Brücke an den Enden fehlt, wohl aber, wenn die in der Mitte fehlt.

Auch im System II unterstützen sich die beiden Brücken wesentlich.

Im Speciellen können sich natürlich diese Verhältnisse bei Anwendung verschiedener Röhren, Condensatoren, primärer Funkenstrecken etc. ändern; das Hauptresultat ist: *Je mehr zu einander zugehörige Knoten eines Systems im allgemeinen überbrückt sind, um so besser spricht ein Rohr am Endcondensator an und um so heller ist das Leuchten.*

Um tiefer in die Verhältnisse einzudringen, haben wir eine Reihe von Messungen der Potentiale und der Dämpfungen ausgeführt.

Durchweg ergab sich die Helligkeit und maximale Potentialhöhe kleiner und die Dämpfung grösser, wenn nicht alle, sondern nur einige der Brücken übergelegt wurden, welche zu einem Knotensystem gehören. Namentlich das Fehlen der vorderen, d. h. dem primären Condensator nächsten Brücken hat grossen Einfluss in dieser Richtung (vgl. o. p. 17).

Wurde z. B. bei dem oben (p. 20) angegebenen System nur der Knoten k_1^0 des zweifachen Systems überbrückt, so ergab sich $E = 1$, $B = 3$; wurde auch noch k_1^1 überbrückt, so war $E = 8$, $B = 3$ ($p = 280$, $T = 2{,}6 \,.\, 10^{-8}$); δ berechnet sich aus diesen Zahlen im zweiten Falle ca. 8mal kleiner, als im ersten Falle. Wir finden also: Die Schwingungen erfolgen regelmässiger und dauern länger, wenn beide Brücken bei dem System mit zwei Knoten aufliegen, als wenn eine fehlt.

Dagegen war bezüglich der Dämpfung kein sehr grosser

Unterschied zwischen den grossen resonirenden Drahtkreisen (k_0^0) und den kleineren (k_1^0 und k_1^1), wenigstens der Grössenordnung nach zu bemerken; die Schwingungen in beiden wurden etwa gleich stark gedämpft.

So ergaben sich z. B. bei dem genannten System

bei dem einfachen Knotensystem[1]): $E = 1{,}7$; $B = 9{,}5$; $E' = 50$; $V = 4$; $p = 280$; $T = 4 \,.\, 10^{-8}$;

bei dem doppelten Knotensystem: $E = 0{,}7$; $B = 6{,}6$; $T = 2{,}6 \,.\, 10^{-8}$, also das logarithmische Decrement für das einfache (δ_1) und das zweifache Knotensystem (δ_2): $\delta_1 = 4{,}6 \times 10^{-4}$, $\delta_2 = 3{,}5 \times 10^{-4}$. —

Wie eine Saite um so reinere Töne gibt, an je zahlreicheren correspondirenden Knoten sie unterstützt wird, um so einfacher ist auch der Complex von Oscillationen zusammengesetzt, welcher auf die Entladungsröhre wirkt, je zahlreichere Brücken aufgesetzt sind, und um so ungestörter findet die Anregung durch dieselben statt.

Will man ferner eine Saite in Unterabtheilungen möglichst rein schwingen lassen, so unterstützt man dieselbe in den Knoten am Ende; das Analogon hierzu haben wir oben (48. p. 569) für das Lecher'sche Drahtsystem kennen gelernt; auch sonst bestehen noch manche Analogien für die beiden Gruppen von Phänomenen.

C. Einfluss von Vorgängen am Endcondensator.

1. Das zum Anleuchten erforderliche Potentialgefälle.

Die Feldenergie pro Volumeneinheit braucht nur innerhalb sehr enger Grenzen zu schwanken, um ein verdünntes Gas noch zum Leuchten zu bringen. So leuchtete ein mit Luft gefülltes 8 cm langes, 5 cm weites mit Glasplatten geschlossenes bis auf ca. $p = 2$ mm Hg-Druck evacuirtes Rohr noch deutlich zwischen den kreisförmigen Platten ($r_2 = 10$ cm) des Endcondensators, als der mittlere Knoten überbrückt war und der Plattenabstand 45 cm betrug. Dabei war die maximale Potentiadifferenz B, auf welche die Platten geladen wurden gleich 4 electrostatische Einheiten (E. S. E.) (1200 Volt). Dies ergibt in dem homogenen Felde zwischen den Platten, in dem die Röhre sich

1) Eine etwas andere Endcapacität als oben p. 20 wurde verwendet, daher grösseres δ_1.

befand, einen Potentialgradienten von rund 0,1 E. S. E. oder 30 Volt pro Centimeter Länge.

Die Energie pro Volumeneinheit ergibt sich angenähert wie folgt: Aus r_2 und s_2 ergibt sich die Capacität zu 0,55 cm, wenn wir die gewöhnliche electrostatische Formel zu Grunde legen. In Wirklichkeit ist die Capacität für die rasch wechselnden Ladungen freilich wohl etwas grösser. Mit Rücksicht auf die Potentialdifferenz von 4 E. S. E. ergibt sich hiernach eine Ladung von 2,2 E. S. E. Der grösste Theil dieser Ladung vertheilt sich auf die ca. 314 qcm grosse Innenfläche des Condensators. Wir wollen annehmen, dass sie ganz zwischen den Condensatorplatten enthalten sei. Dann kommen auf 1 cm^2: 0,007 E. S. E.

Jeder Kubikcentimeter enthält also im Maximum die Energie $^1/_2 \times 0{,}007 \times 0{,}1 = 0{,}00035$ Ergs. Hiervon wird aber selbst wieder nur ein geringer Bruchtheil zur Erregung der Molecüle verwendet. Durch directe Versuche haben wir uns davon erzeugt, dass es ohne wesentlichen Einfluss auf die Dämpfung ist, ob ein zwischen den Endcondensatorplatten befindliches Gas leuchtet oder nicht. Wenn wir also annehmen, dass die hier bei jeder Halbschwingung auftretende Feldenergie von $3{,}5 . 10^{-4}$ Ergs pro Volumeneinheit ganz zum Anregen des Gases und zur Unterhaltung seines Leuchtzustandes verwendet werde, so haben wir hierfür nur eine obere Grenze festgesetzt; in Wirklichkeit ist dieser Betrag jedenfalls noch viel kleiner. Eine andere im nächsten Abschnitt zu behandelnde sehr wichtige Frage ist, ob nicht schon die hier vom Gase aufgenommene und in eine andere Form von Energie umgewandelte geringe Feldenergie *einem leuchtenden Gase* die Eigenschaft verleiht, welche die Leiter im gewöhnlichen Sinne characterisirt, nämlich, dass sie die Feldenergie zu sich hinziehen und eben dadurch zu dem werden, was man mit dem Worte „Leiter“ kennzeichnen will.

Der oben ermittelte Maximalbetrag der Energie, welcher in einem Felde hinreichend oft wechselnd ein verdünntes Gas schon zum Leuchten bringt, gibt Veranlassung zu einigen interessanten Vergleichen. Da eine Dyne etwa dem Druck von 1 mgr auf seine Unterlage gleichkommt, so ist der Energievorrath, welcher 1 cbcm Gas zum Leuchten bringt, wenn er

nur genügend rasch sich ändert und häufig genug denselben Maximalwerth erreicht, noch kleiner als der Energievorrath, welcher in 1 mgr aufgehäuft ist, wenn es nur um 0,0035 mm über seine Unterlage erhoben ist. Mit einem einzigen Erg Energie könnten bei ca. 10^8 Zeichenwechseln in der Secunde caet. par. 2860 cbcm verdünnte Luft zum hellen Leuchten gebracht werden. Dies kann bei Verwendung leuchtender Gase unter dem Einflusse rascher Wechselströmungen für Beleuchtungszwecke von praktischer Bedeutung werden; jedenfalls haben wir hier bei weitem die ökonomischste Lichtquelle, die wir kennen.

Die Anzahl der Molecüle in 1 cbcm Gas bei 0^0 und $p = 760$ mm Druck ist etwa $21 . 10^{18}$, also bei unserem Drucke von $p = 2$ mm etwa $6 . 10^{16}$. Das einzelne Molecül braucht zu seiner Anregung also im Durchschnitt nicht mehr als $6 . 10^{-21}$ Ergs.

Andere Gase, so Kohlensäure, Wasserstoff, Leuchtgas verhalten sich analog.

Wir wollen noch die hier zum Anregen verwendeten Energiemengen vergleichen mit den zur Dissociation der Molecüle nöthigen Energiemengen. Um 1 gr H_2 zu dissociiren, sind mehr als 100 000 gr Cal. oder $4,2 . 10^{12}$ Ergs nöthig.[1] Bei unseren Verdünnungen ist 1 gr H_2 in ca. $4,3 . 10^6$ cbcm enthalten. Um diese Menge zum Leuchten anzuregen, braucht man $1,5 . 10^3$ Ergs also ca. $3 . 10^9$ mal weniger als zu ihrer Dissociation. Würde die ganze Energie einer Entladung zur Dissociation des Gases verwendet werden, so würde doch erst 1/3 000 000 000 zersetzt werden.

2. Einfluss der Gegenwart anderer leuchtender Röhren als der untersuchten im Felde.

Ausser diesen durch die Vorgänge im primären und secundären Leiterkreise bedingten Einwirkungen ist für die Menge der Energie, welche einem im Felde des Endcondensators befindlichen Gase zuströmt, noch eine andere Erscheinung maassgebend. Es zeigt sich nämlich, dass *beim Eintritt des Leuchtens durch electrische Oscillationen in dem Felde um den Condensator herum eine Aenderung der Energievertheilung eintritt.*

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **18.** p. 509. 1883.

Man überzeugt sich hiervon leicht schon durch sehr einfache Versuche: Würde die Vertheilung der Oscillationen in dem Raume um den Condensator unabhängig sein von der Gegenwart leuchtender Gase, so dürfte die Intensität des Leuchtens eines Rohres nicht geändert werden, wenn an irgend einer Stelle ein anderes Gas zum Leuchten gebracht wird (abgesehen von den in der folgenden Arbeit zu besprechenden Schirmwirkungen. Dies ist aber nicht der Fall.

Neben dem Endcondensator wurde ein Rohr *R* mit inneren Belegen (p. 566) mit seiner Axe parallel der Axe des Condensators aufgestellt, und zwischen die Platten in ziemlicher Entfernung von dem Rohr *R* eine evacuirte Kugel *K* gebracht. Beim Verschieben der Brücke leuchtete stets zunächst *R* hell auf, gleich darnach aber *K* und zugleich blasste *R* stark ab. Es ist, als ob zunächst ein grosser Theil der im Condensator sich anhäufenden Energie sich durch *R* ausgliche, dann aber ein Theil derselben durch *K*, wodurch der auf *R* kommende Theil wesentlich herabgesetzt wird.

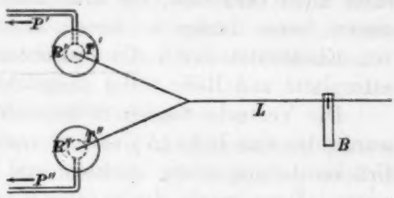


Fig. 4.

Wir haben die Erscheinung genauer verfolgt und wollen, da sie eine wesentliche Rolle bei der Anregbarkeit von gasverdünnten Räumen spielt, schon hier auf einige diesbezügliche Versuche eingehen, wiewohl wir erst später die Bedeutung der Erscheinung genauer ins Auge fassen wollen.

Um die Erscheinungen möglichst klar und einwandfrei zu erhalten, haben wir zwei vollkommen getrennte Felder, also *zwei Endcondensatoren*, verwendet. Um dieselben mit den primären Condensatoren zu verbinden, wurde jeder der beiden Lecher'schen Drähte *L* an einer bestimmten Stelle in zwei gegabelt (Fig. 4); jedes der beiden dadurch entstehenden Drahtsysteme wurde zu dem einen von zwei übereinanderstehenden Endcondensatoren *T'* und *T''* geführt. Die Gabelung fand in verschiedenen Abständen von den Endcondensatoren statt. Wir benutzten u. a. einen Schliessungskreis von folgenden Constanten:

Hauptcondensator:	Drähte:	Jeder der Endcondensatoren:
$f_1 = 30 \times 30\,\mathrm{cm}^2$	$L = 440$ cm	$r_2 = 5$ cm
$\varepsilon_1 = 6{,}7$ cm	$b = 30$ „	$\varepsilon_2 = 10$ „
$l = 13$ „	$a = 0{,}05$ „	

Die Gabelung der Lecher'schen Drähte fand bei verschiedenen Versuchsreihen in 160, 55 und 18 cm Entfernung von der Axe der Endcondensatoren statt; benutzt wurde das einfache und zweifache Knotensystem ($k_1{}^0 = 28$, $k_1{}^1 = 384$ cm).

Zwischen die Platten der Endcondensatoren waren zwei gleiche 9 cm lange, 5 cm weite, an den Enden durch Glasplatten geschlossene Glascylinder R' und R'' axial gestellt, von denen jeder mit einer besonderen Quecksilberluftpumpe communicirte. Die Röhren standen so, dass die Platten den Endcondensator nicht berührten; die auftretenden Potentialschwankungen waren ferner immer so klein, dass ein directer Uebergang von Electricität durch die Zwischenräume zwischen Condensatorplatte und Rohr völlig ausgeschlossen war.

Die Versuche fanden in folgender Weise statt: Zunächst wurde das eine Rohr (R') so weit evacuirt, dass es bei richtiger Brückenstellung schön leuchtete und die typische Erscheinung zeigte. Dann wurde das andere (R'') bis zu demselben Drucke evacuirt. In dem Momente wo (R'') aufleuchtete, verminderte sich die Helligkeit in (R') bedeutend; sie wuchs sofort wieder wenn (R'') in irgend einer Weise (z. B. durch Berühren und Wiederloslassen der Condensatorplatten oder durch Erhöhung oder Erniedrigung des Druckes unter den unteren Grenzwerth, bei dem unter den obwaltenden Verhältnissen noch ein Leuchten stattfand) zum Erlöschen gebracht wurde. Wurde umgekehrt R') zum Erlöschen gebracht, so stieg die Helligkeit in (R''). Wir haben diese Wechselwirkung nach den verschiedensten Richtungen hin durch Aenderungen des Druckes in dem einen oder anderen Sinne untersucht. Da sich bei den hier vorkommenden Druckänderungen die Dielectricitätsconstante des verdünnten Gases nur unmerklich ändert (die Brückenlage war die gleiche, mochte nur eine oder beide Röhren leuchten), so kann diese durchgreifende Aenderung der Energievertheilung in den beiden Condensatoren nur mit dem *Leuchten* des Gases zusammenhängen. Wir sehen: ein zum Leuchten gebrachtes Gas

zieht die Feldenergie gewissermaassen in sich hinein. Die Schwingungen an den Platten des Endcondensators gleichen sich vornehmlich durch das leuchtende Gas hindurch aus. In diesem Sinne „*absorbirt*“ ein leuchtendes Gas electrische Feldenergie.

Welche Bedeutung dies für den ganzen Process des Leuchtens eines Gases unter der Wirkung electrischer Entladungen hat, wollen wir, wie erwähnt, später ausführlicher erörtern. Hier möge nur noch die Bemerkung Platz finden, dass für alle theoretischen Berechnungen über die Feldenergie eines Condensators, bei dem sich zwischen den Platten nur leuchtendes Gas befindet, gerade dieses Resultat von hoher Bedeutung ist: *Befindet sich in einem Theile des Condensatorfeldes ein leuchtendes Gas, so ist die Energievertheilung eine ganz andere, als in einem homogenen Felde; die Energieröhren ziehen sich in grösserer Menge nach dem Gase hin und durch dieses hindurch, es hat für den electrischen Kraftfluss eine grössere Permeabilität, als die umgebenden nichtleuchtenden Gasmassen.*

VI. Schlussbetrachtungen.

Wir wollen zum Schluss dieses ersten Abschnittes unserer Mittheilungen versuchen, den Einfluss der Dämpfung etc. auf das Leuchten aus allgemeinen Anschauungen zu erklären.

Um die Vorstellungen bei den späteren Betrachtungen zu fixiren, möchten wir hier folgende Andeutungen über die Vorstellungen geben, die wir uns von den Vorgängen in einem von Oscillationen durchsetzten Gase gebildet haben. Eine genauere Ausführung derselben behalten wir weiteren Mittheilungen vor.

Einer von uns hat früher gezeigt[1]), dass sich die optischen Erscheinungen erklären lassen, wenn wir sie auf Bewegungen der electrischen Ladungen der Atome bezw. Molecüle zurückführen, die wir diesen zuschreiben müssen, um die Thatsachen der Electrolyse zu erklären, der sog. „Valenzladungen“ (H. v. Helmholtz, Faraday-Rede), vgl. auch die Arbeiten von Richards[2]) und Stoney[3]). Ebert berechnete aus der Strahlung des Natrium-Molecüles, wie sie durch

1) H. Ebert, Arch. de Genève. **25.** p. 489, 1891

2) Richards, Verh. der physikal. Gesell. Berlin. **10.** p. 73. 1891.

3) G. J. Stoney, Phil. Trans. Dubl. Soc. (2) **4.** p. 563. 1891.

E. Wiedemann[1]) in absolutem Maasse der Grössenordnung nach ermittelt worden war, die Grösse dieser Ladung, das „Elementarquantum“ zu $1{,}4 \,.\, 10^{-11}$ $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$; Richards findet dieselbe Electricitätsmenge aus den Messungen des electrochemischen Aequivalentes von F. und W. Kohlrausch gleich $1{,}29 \,.\, 10^{-10}$ $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$; Stoney giebt sie (bei ihm „das Electron“ genannt) zu $3 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{cm}^{3/2}\,\mathrm{gr}^{1/2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ an; wie man sieht, stimmen diese Zahlen in der Grössenordnung mit einander überein.

Nehmen wir an, dass den electrischen Ladungen in Bezug auf das materielle Molecül eine gewisse Bewegungsfreiheit (im Sinne der gewöhnlichen Mechanik) zukommt, so können wir die Wärme- und Lichtstrahlung auf Oscillationen der electrischen Valenzladungen zurückführen, Oscillationen, wie sie unter gewöhnlichen Bedingungen schon bei den Zusammenstössen zweier Molecüle erregt werden, und deren Ausbreitung für den Fall einer geradlinigen Bahn von Hertz experimentell und theoretisch studirt worden ist.

Halten wir an dem landläufigen Bilde, welches man sich von der Erscheinung der electrischen Ladung gemacht hat, fest, wonach diese darin besteht, dass auf der Oberfläche der Molecüle sich eine Schicht „Electricität“ befindet, so ist es am einfachsten sich die Oscillationen, welche sich dem umgebenden Felde mittheilen, durch „Verschiebungen“ der electrischen Molecülladungen hervorgebracht zu denken. In diesem Sinne können wir, wenn wir uns auf den alten Standpunkt stellen, was im vorliegenden Falle den Vortheil grösserer Anschaulichkeit bietet, von „verschobenen Valenzladungen“ reden. In der „Grösse der Verschiebung“ haben wir ein Maass für den Grad, um welchen der augenblickliche electrische Zustand des Molecüles von dem Gleichgewichtszustande entfernt ist.

Jedem Molecüle kommt je nach seinem Baue und den durch diesen bedingten in ihm wirksamen Kräften ein bestimmtes System von electrischen Eigenschwingungen seiner Valenzladungen zu, welche das Spectrum bestimmen. Die Schwingungszahlen der Grundschwingungen hängen von den Dimensionen des Molecüles ab, wie bei einem durch eine Bahn von geringem Widerstande sich entladenden Condensator.

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. 5. p. 509. 1878.

Wenn wir, wie es bei den vorliegenden Versuchen geschieht, die Molecüle eines verdünnten Gases durch electrische Schwingungen von der Schwingungszahl 10^8 zum Leuchten anregen, so entspricht dieser Vorgang dem Spiel der primären Funkenstrecke, welches in dem durch den Condensator und den anliegenden Theilen des Drahtsystems gebildeten Schliessungskreise Schwingungen erregt, die dann in dem Gase solche von über millionen Mal grösserer Schwingungszahl hervorrufen. Die electrischen Oscillationen, die wir zur Lichterregung verwenden, repräsentiren gewissermassen nur die Bewegung des streichenden Bogens, unter dessen Einfluss die Eigenschwingungen einer Saite (hier der Valenzladungen der einzelnen Gasmolecüle) angeregt werden; es findet eine „Transformation“ von Schwingungszahlen von der Ordnung 10^8 auf solche von der Ordnung 10^{14} und höher hinauf statt; der Mechanismus dieses Vorganges lässt sich durch die allgemeinen Gleichungen der reinen Mechanik darstellen; man geht dabei zweckmässig von derjenigen Form derselben aus, die ihnen H. von Helmholtz in seinen „Principien der Statik monocyklischer Systeme“ gegeben hat; denn es lässt sich zeigen, dass die monocyklischen Gesetze auf die hier in Betracht kommenden Formen oscillatorischer Bewegungen Anwendung finden und namentlich über den Umsatz der Energie bei denselben wichtige Anhaltspunkte gewähren.

Hierbei ist nicht zu vergessen, dass die in den Drähten ankommenden den Endcondensator ladenden und entladenden Oscillationen zunächst Eigenschwingungen des als Condensator gedachten Entladungsrohres oder selbst einzelner Theile desselben anregen, wie schon die Schichtenbildung (vgl. die vorläufigen Mittheilungen und spätere Untersuchungen) zeigt, und in den meisten Fällen wohl erst diese, an sich schon hohen Schwingungen, in die die Lichtemission veranlassenden Molecülschwingungen transformirt werden.

Die Ursache für die Thatsache, dass wiederholte Potentialschwankungen in so hohem Grade die Leuchterscheinungen befördern, ergibt sich aus dieser Auffassung folgendermaassen.

Damit ein Leuchten eintritt ist es nöthig, dass eine oscillatorische Verschiebung in den Molecülen eintritt, die einen gewissen Betrag erreicht. Eine einmalige, wieder aufgehobene Verschiebung im Felde wird eine ebensolche in den Molecülen

erzeugen, die aber nur schwache Schwingungen innerhalb der Molecüle hervorrufen wird. Eine solche erste Verschiebung kann auch zu einer Polarisation der Gasmoleküle resp. der Wandungen der Gefässe führen. Folgt aber der ersten Verschiebung eine zweite, dritte u. s. f., so werden sie die Wirkung der ersten unterstützen. Diese Auffassung wird ausserdem durch die folgenden zwei experimentell festgestellten Thatsachen gestützt.

1. Infolge von Oscillationen üben leuchtende Gase eine Schirmwirkung auf ankommende Oscillationen aus (vgl. die nächste Abhandlung) wie eine leitende Metallmasse; sie absorbiren also die Energie der auftreffenden Oscillationen; während dies nicht leuchtende nicht oder doch nur in weit geringerem Maasse thun. Denn in dem Auftreten von Schwingungen in den Molecülen von gerade so grossen Amplituden und Schwingungsdauern, dass sie von uns als Licht wahrgenommen worden, kann an sich zunächst kein Grund gesehen werden, dass nur *leuchtende* Molecüle electrische Oscillationen absorbiren.

2. Polarisirte Molecüle, wie sie bei der statischen Ladung der Wandung der Glasgefässe vorhanden sind, befördern in hohem Grade die Erregung von Gasen durch Oscillationen, indem wohl zunächst diese Molecüle durch die ankommenden Oscillationen angeregt worden; ihre Erregung überträgt sich dann auf die anderen. Dies wird dadurch bewiesen, dass ein an sich schwer anregbares Rohr, das aber einmal angeregt war, eventuell noch nach Tagen anspricht, wenn man es ruhig liegen lässt; es verliert aber sogleich diese Eigenschaft, wenn man es der ganzen Länge nach mit dem Finger ableitend berührt, oder besser noch mit einer Flamme überfährt.

Betrachten wir nun ein Gas in einem electrischen Felde, wie in demjenigen zwischen den Platten unseres Endcondensators, in dem Potentialschwankungen vorhanden sind, und in dem der ersten Potentialschwankung eine zweite so schnell folgt, dass die von der ersten angeregten Oscillationen der Molecüle noch nicht vollkommen, sei es durch Strahlung, sei es durch innere Dämpfung verschwunden sind, oder dass einige Molecüle, die an den Wänden sich befinden, noch polarisirt sind; dann werden stets einige dieser Molecüle sich in solchen Lagen befinden, dass die neu ankommenden Oscillationen die

in ihnen vorhandenen Schwingungen steigern resp. die vorhandenen Polarisationen vergrössern. Da nun bereits in Oscillation befindliche Molecüle und bereits polarisirte in höherem Grade als nicht oscillirende und nicht polarisirte im Stande sind Oscillationen aufzunehmen, so wird durch jede neue ankommende Potentialschwankung die Intensität der Oscillationen der Molecüle bezw. ihre Polarisation vermehrt und eine Bewegung in ihnen hervorgerufen, die eventuell zu einem Leuchten führt. In einem solchen Zustande sind aber die Molecüle besonders geeignet, electrische Energie zu absorbiren und so in gewisser Hinsicht die Rolle von Leitern zu übernehmen.

Der ganze Vorgang lässt sich, falls wir von den an den Wänden haftenden polarisirten Molecülen absehen, mit dem an einem in einem Phosphoroskop befindlichen Körper vergleichen, der durch die Phosphorescenz selbst ein erhöhtes Absorptionsvermögen für das Licht und einen entsprechend grösseren Umwandlungscoefficienten der auffallenden Lichtstrahlen in emittirte erhält. Bei einem solchen Körper wird bei wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit des Apparates die Helligkeit sehr schnell wachsen.

Sehr gut kann man ein von Oscillationen durchsetztes Gas auch mit einem Körper vergleichen, der durch Strahlen von grosser Wellenlänge allmählich bis zur Weissgluth erhitzt werden kann; hier ist die Analogie mit der Absorption electrischer Oscillationen auch noch darin vorhanden, dass mit zunehmender Temperatur d. h. mit zunehmender Amplitude der Schwingungen des Körpers, auch die Absorption für die auffallenden Wellen wächst.

Je schneller aber die einzelnen Entladungen des primären Condensators aufeinanderfolgen, eine um so grössere Anzahl Molecüle wird bei einer bestimmten Entladung infolge der Erregung durch die vorhergehende noch in einem Zustande sein, der sie befähigt, die durch eine zweite Entladung zugeführte Energie zu absorbiren. Je geringer die Dämpfung ist, je grösser die Zahl der Oscillationen bei jeder einzelnen Entladung ist, um so intensiver muss also auch die Anregung sein.[1])

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., Februar 1893.

---

1) Eine weitere Abhandlung über diese Gegenstände folgt demnächst.

2. *Versuche über electrodynamische Schirmwirkungen und electrische Schatten; von H. Ebert und E. Wiedemann.*[1])

(Im Auszuge mitgetheilt in den Berichten der physikal.-med. Soc. zu Erlangen, Sitzung vom 8. Febr. 1892.)

Eine der überraschendsten Erscheinungen, welche rasche electrische Oscillationen darbieten, ist der fast unüberwindliche Widerstand, den gute Leiter ihrem Eindringen entgegensetzen. Denn hierdurch erscheinen die den anderen Gebieten electrischer Erscheinungen entnommenen Begriffe von Leiter und Nichtleiter vollkommen ihre Bedeutung vertauscht zu haben; jedenfalls zeigen diese Erscheinungen, dass jene Begriffe mit Rücksicht auf das neue, durch die Versuche des Hrn. H. Hertz eröffnete Gebiet zu erweitern sind.

Ausser der Undurchdringlichkeit für rasch wechselnde periodische electrische Zustände zeigen die Metalle aber auch noch Wirkungen, welche ihre Umgebung, wenn sie von solchen electrischen Schwingungen erfüllt ist, bis zu einer gewissen Entfernung hin ergreift; man hat diese Wirkungen passend „*Schirmwirkungen*" genannt. So fand Hr. Hertz[2]), dass eine Röhre von ca. 15 cm Durchmesser, deren Mantel aus 24 dünnen Kupferdrähten gebildet war, keine electrodynamische Wirkung von schnellen electrischen Oscillationen aus dem äusseren Felde in das innere übertreten lässt. Hier äusserte sich also die Schirmwirkung bis auf Entfernungen von mindestens 1 cm um jeden Draht herum.

J. Stefan[1]), der einer primären Funkenstrecke eine secundäre als Empfänger in 20 cm Entfernung parallel gegenüberstellte, fand weiter, dass eine 1 m lange, 10 cm hohe Metalltafel nicht nur dann die Wirkung der primären Oscillation auf den Empfänger aufhob, diesen also electrisch „be-

---

1) Die Untersuchung wurde mit Unterstützung des Elisabeth Thompson Fund in Boston ausgeführt.

2) H. Hertz, Wied. Ann. **37.** p. 401. 1889.

schattete", wenn sie zwischen, sondern auch dann, wenn sie knapp hinter der secundären Funkenstrecke stand. Ein Leiter übt also auch vor sich electrodynamische Schirmwirkungen aus. Hr. L. Boltzmann[2]), der den Fall, dass electrische Planwellen senkrecht auf eine ebene Metalloberfläche auffallen, genauer discutirt hat, zeigte, dass nur ein verschwindender Bruchtheil der kinetischen Energie der Planwelle überhaupt die Trennungsfläche überschreitet, dass die Welle vielmehr fast vollkommen total reflectirt wird. Die Schirmwirkung vor der Metalltafel Stefan's kommt also wohl dadurch zu Stande, dass die ankommenden und reflectirten electrischen Wellen eine stehende Welle bilden, für die an der Wand ein Knoten der electrischen Kraft gelegen ist. In einem zum Verhältniss zur Länge der Welle kleinen Abstande vom Knoten ist die Amplitude aber dann klein, wenn die Amplituden der ankommenden und reflectirten Welle nahe gleich sind. Dies ist nach den Boltzmann'schen Untersuchungen in der That für die electrischen an Metallen reflectirten Wellen der Fall, daher hier die Schirmwirkung.

Mit solchen Schirmwirkungen hängen eng zusammen die von Hrn. Holtz[3]) zuerst eingehend studirten, sonst so räthselhaften electrischen Schattenbilder. Eine eingehende Discussion derselben kann erst bei der Behandlung der Entladungserscheinungen bei höheren Drucken gegeben werden.

Wir haben dieses Erscheinungsgebiet der electrodynamischen Schirmwirkungen und der dadurch bedingten Schattenwirkungen für electrische Schwingungen eingehender untersucht. Dabei war zunächst die Methode für den vorliegenden Zweck zu vereinfachen und specieller auszubilden. Zunächst musste es günstiger sein, an Stelle der schnell gedämpften, verhältnissmässig unregelmässigen und vielen Zufälligkeiten ausgesetzten primären Oscillationen, wie sie Stefan verwendete, die langandauernden secundären eines resonirenden Drahtkreises zu verwenden. Wegen ihrer grossen Symmetrie und Klarheit haben wir die Lecher'sche Anordnung gewählt, und zwar

1) J. Stefan, Wied. Ann. **41.** p. 416. 1890.
2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **48.** p. 63. 1893.
3) Holtz, Göttinger Nachr. 1880. p. 545.

mit einer Brücke, und die Versuche alle im Schwingungsfelde des Endcondensators angestellt. Ferner war die schwierig zu beobachtende secundäre Funkenstrecke, wie sie auch Hr. Hertz verwendete, durch ein bequemer zu handhabendes und empfindlicheres Hülfsmittel zu ersetzen. Ausgezeichnet haben sich auch hier die „empfindlichen" Röhren bewährt, die wir schon in der vorausgehenden Arbeit verwendet haben. Um möglichst einfache Versuchsbedingungen zu haben, verwendeten wir gewöhnlich nur einfache an beiden Enden zugeschmolzene Röhren (ohne die Bd. 48 p. 566 beschriebenen inneren Belege) von 0,2—2 cm Durchmesser und 10—50 cm Länge bei beliebiger Wandstärke. Ein solches Rohr leuchtet, genügend evacuirt, in der Nähe des Endcondensators meist ohne weiteres an (über die „Anregbarkeit" vgl. a. a. O. p. 565), durch sein Erlöschen ist es dann sehr geeignet, das Vorhandensein eines Schattens, d. h. eines Raumes im Felde zu constatiren, in dem keine Oscillationen oder doch nur solche von geringer Intensität vorhanden sind.

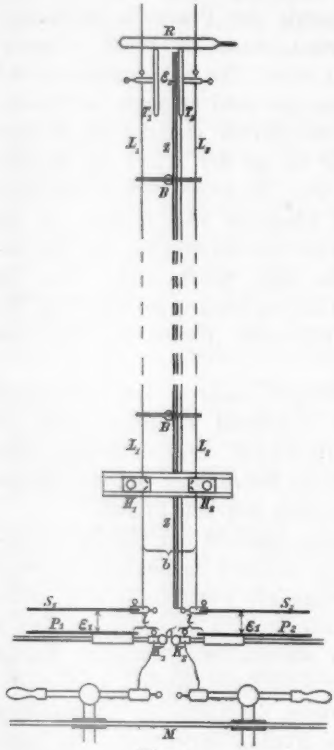


Fig. 1.

Alle die im Folgenden beschriebenen Versuche sind durch diese Anordnung so augenfällig geworden, dass sie leicht einem grossen Auditorium vorgeführt werden können.

Das wesentlich Neue, das sich aus diesen Versuchen ergeben hat, liegt in dem sicheren Nachweis, dass auch verdünnte Gase, wenn sie nur in irgend einer Weise in den Zu-

stand des Leuchtens versetzt werden, die Eigenschaft der Leiter annehmen, um sich herum einen electrodynamischen Schattenraum zu bilden. Auf die hieraus sich ergebende allgemeine Definition des Leiters kommen wir später zurück.

Apparat. Anregbarkeit electrodenloser Röhren.

Bezüglich der Beschreibung der einzelnen Theile des Apparates verweisen wir auf unsere frühere Arbeit (Bd. 48 p. 549).

Wie erwähnt, haben wir die sehr langsam abklingenden Schwingungen eines secundären Entladungskreises und zwar in der Lecher'schen Form benutzt (vgl. Fig. 1). Zum Ex-

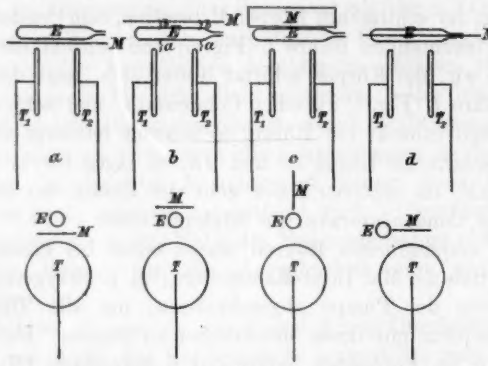


Fig. 2.

perimentiren sehr bequem ist z. B. folgende Anordnung (wegen der Bezeichnungen vgl. die Tabelle in der früheren Arbeit Bd. 48 p. 564):

Hauptcondensator:	Drähte:	Endcondensator:
$f_1 = 30 \times 30$ cm²	$L = 400$ cm	$r_2 = 10$ cm
$\varepsilon_1 = 2$ cm	$b = 30$ „	$\varepsilon_2 = 6$ „
$l = 0$ „	$a = 0{,}05$ „	

Kugeldurchmesser: 3,5 cm.

Die Erscheinungen sind am deutlichsten bei einfacher Ueberbrückung.

Auf der von den Lecher'schen Drähten L_1 und L_2 abgewandten Seite werden in der Nähe der Endcondensatorplatten T_1 und T_2 (vgl. Fig. 2) die zu untersuchenden Röhren und die Schirme aufgestellt.

Die empfindliche Röhre E, welche zur Untersuchung des Feldes diente, stand stets parallel der Axe des Endcondensators und quer vor den Platten T_1, T_2 desselben. Lineare schirmende Körper lagen mit ihrer Längsrichtung gleichfalls parallel der Axe des Endcondensators. Die Figuren 2 *a* bis 2 *d* erläutern die bei einem rechteckigen Metallblech M benutzten Lagen und zwar gibt die obere Figurenreihe eine Ansicht von oben, die untere eine Ansicht von der Seite. Dabei liegt bei 2 *a*, 2 *b* und 2 *d* die Ebene des Schirmes in der Verticalebene, bei 2 *c* in der Horizontalebene.

Wir führen folgende Bezeichnungsweise ein, die zugleich bei allen anderen Schirmen angewendet werden soll:

Liegt der schirmende Körper M zwischen dem Condensator T und der leuchtenden Röhre E (Fig. *a*) und erlischt die Röhre, so sagen wir, der Körper schirmt hinter sich, liegt die leuchtende Röhre E (Fig. *b*) zwischen Condensator und schirmendem Körper und erlischt die Röhre, so schirmt letzterer vor sich; hat der Schirm die Lagen 2 *c* und 2 *d*, so sagen wir, er schirme neben sich; im ersteren Falle geht die Ebene des Schirmes durch die Condensatoraxe, im letzteren nicht.

Die empfindlichen Röhren waren meist bei einem geeigneten, mittels des Mac Leod-Manometers (vgl. p. 561) gemessenen, Drucke von der Pumpe abgeschmolzen, um alle Theile des Feldes bequem mit ihnen untersuchen zu können. Den Druck wollen wir im Folgenden immer mit p bezeichnen (Millimeter Quecksilber). Die Röhren fasst man mit isolirenden Holzklammern.

Ein solches Rohr zum Anleuchten zu bringen, bietet mitunter gewisse Schwierigkeiten. *Zunächst handelt es sich also darum, electrodenlose Röhren überhaupt zum Leuchten zu bringen.* Wir werden in einer späteren Abhandlung sehr eingehend die Anregbarkeit von Röhren behandeln. Hier sei nur das für diese Versuche Nothwendige erwähnt.

Zunächst verweisen wir auf p. 565 der vorigen Abhandlung. Dort ist zunächst gezeigt worden: Je weiter die Röhren sind, um so leichter sprechen sie an. Namentlich die dort erwähnten inneren Belege haben wir hier bei den anregenden Röhren vielfach verwendet.

Am leichtesten sprechen electrodenlose Röhren an, wenn

man sie erst mit den Condensatorplatten in Berührung bringt; sie leuchten dann fast immer auf; man kann sie dann auch von den Platten entfernen, ohne dass sie aufhören zu leuchten.

Röhren, welche für sich nicht oder doch nur schwer anregbar sind, sprechen in vielen Fällen leicht an, wenn man ihnen ein leuchtendes Rohr nähert, bez. auch nur an den Condensator ein solches Rohr legt. Eine Röhre E_1 von 2 mm Durchmesser sprach selbst, wenn sie an den Condensator angelegt wurde, nicht an. Sobald aber gleichzeitig eine Röhre E_2 mit inneren Belegen angelegt wurde und diese zu leuchten anfing, sprach das Rohr E_1 an; ebenso, wenn irgend eine andere Röhre, die von selbst anspricht, genähert wurde. Dies steht nicht mit dem p. 24 erhaltenen Resultate in Widerspruch, nach dem die Energie sich zwischen zwei im Felde befindlichen leuchtenden Röhren theilt. E_1 würde, wenn es für sich allein leuchtete, heller leuchten, als wenn E_2 gleichzeitig vorhanden ist; damit E_2 aber zum Leuchten kommt, muss es erst durch die Schwingungen in E_1 angeregt werden. Ja, leuchtet E_2 auch noch weiter, wenn E_1 wieder, nachdem es E_2 angeregt hat entfernt wird, so leuchtet es heller, als während E_1 in der Nähe des Endcondensators sich befindet.

Ein Beipiel für die Anregbarkeit gibt nachfolgender Versuch.

Röhren E_3 und E_4 von 8 und 3 mm Durchmesser waren so in der Nähe des Condensators aufgestellt, dass sie nicht von selbst ansprachen. Man näherte ihnen eine leuchtende Röhre E_5 von 1,2 cm Durchmesser, dann leuchteten sie auf. (Man darf letztere Röhre den Röhren E_3 und E_4 nicht zu weit nähern, da sie sonst die leuchtenden Röhren E_3 und E_4 infolge der eigenen Schirmwirkung wieder zum Erlöschen bringt (vgl. w. u.).

Es ist nicht einmal nöthig, dass das anregende Rohr E_2 resp. E_5 in der Nähe des Endcondensators zum Leuchten gebracht wird. Legt man ein leicht anregbares Rohr R an irgend einer Stelle über die einfach überbrückten Lecher'schen Drähte zwischen Brücke und Endcondensator, und kommt es dort zum Leuchten, so wird in vielen Fällen ein Rohr E in der Nähe des Endcondensators, welches an sich nicht anspricht, angeregt. Leuchtet das Rohr E auch noch nach Fortnahme

von R weiter, so ist die Helligkeit in demselben bei Gegenwart und Entfernung von R fast dieselbe, wenn auch in letzterem Falle etwas grösser infolge der in R abgegebenen Energie (vgl. p. 25).

So leuchtete ein Rohr E von 12 cm Länge und 1 cm innerer Weite, gefüllt mit Luft von 1,17 mm Druck, in der Entfernung von 1—2 cm vom Endcondensator aufgestellt, nicht; wurde an irgend einer Stelle zwischen der Brücke und dem Endcondensator ein 50 cm langes, 2 cm weites Rohr R mit Luft von 0,23 mm Druck über die Drähte gelegt, so leuchtete E in bläulichem Lichte hell auf, sobald R in dem ihm eigenen röthlichen Lichte leuchtete.

Diese Eigenschaft haben wir benutzt, um immer mit Sicherheit ein gutes Ansprechen unserer Röhren E herbeizuführen. Wir haben zu diesem Zwecke ein weites, gut ansprechendes Rohr mit oder ohne innere Belege — wir wollen es die „Anregeröhre" nennen und stets mit R bezeichnen — dauernd an den Endcondensator mittelst Gummibändern so gehängt, dass es beide Platten P_1 und P_2 berührte. Solange die Anregeröhre sich am Condensator befand, leuchteten die meisten Röhren, selbst recht enge und solche ohne Belege, leicht an und die Versuche gingen sehr sicher.

Röhren, die für sich nicht anregbar sind, sprechen oft, wenn auch nicht immer, an, wenn man über die beiden Endcondensatorplatten einen Metallbügel legt und diesen dann so abhebt, dass zwischen ihm und den Platten ein Funken überspringt.

Der Vorgang dürfte bei beiden Fällen der Anregung der sein, dass die Oscillationen von relativ kleiner Schwingungszahl in dem ursprünglichen Leitersystem, sei es in der anregenden Röhre, sei es in dem abgehobenen Metallbügel, in solche von grösserer Schwingungszahl transformirt werden, die dann die relativ unempfindlichen Röhren anregen. In einzelnen Röhren (vgl. unsere zweite Abhandl. in den Ber. der Phys. med. Soc. zu Erlangen p. 32) auftretende stehende Schwingungen haben es uns wahrscheinlich gemacht, dass hierbei in einem Beispiele etwa die 1200. Oberschwingung entsteht.

Resultate.

A. Schirmwirkung von Leitern erster und zweiter Klasse.

1. Schirme aus Metall und überhaupt aus allen Substanzen, die hinter sich schirmen, schirmen auch vor sich und neben sich. Hält man hinter ein leuchtendes Rohr, sodass also das Rohr zwischen Condensator und Schirm liegt, einen solchen Schirm, so erlischt es, wenn die Längen und Abstände beider passend gewählt werden.

Es schirmen: Metalle, selbst in sehr dünnen, vollkommen durchsichtigen Schichten, so z. B. Blattgold, Silber- und Aluminiumblatt; Röhren, die mit Lösungen von Electrolyten und zwar selbst sehr verdünnten gefüllt sind, Cylinder von festem Chlorblei etc.

Nicht schirmen Isolatoren: Glasplatten, Glimmerplatten etc.

2. Eine wachsende Schirmwirkung macht sich in einer allmählichen Verkürzung der Lichtsäule in der Entladungsröhre bemerkbar.

Nähert man dem leuchtenden Rohr *E* aus grossen Abständen allmählich einen Metallschirm, so verkürzt sich nach und nach die Lichtsäule, bis sie zuletzt auf einen kleinen zwischen den Condensatorplatten gelegenen Rest zusammengeschrumpft ist, der dann bei weiterer Annäheruug ganz plötzlich verschwindet.

3. Rechteckige Metallschirme von gleicher Ausdehnung in der Richtung der Längsaxe der Röhre schirmen vor sich gleich gut, fast unabhängig von ihrer Dimension senkrecht zu der Richtung der Axe der Röhre.

Drähte, die neben dem leuchtenden Rohre ausgespannt sind, schirmen nicht zu weite Röhren fast ebenso gut wie breite Metallbleche von gleicher Länge, ebenso verhalten sich Streifen aus Metalldrahtnetzen.

4. Das Dielectricum, in dem sich der schirmende Körper befindet, ist ohne merklichen Einfluss.

Blanke und mit Kautschuk überzogene Drähte z. B. schirmen gleich gut.

5. Die Länge *L* des Metallschirmes darf im Verhältnisse zur Länge *l* der Lichtsäule im leuchtenden Rohr *E* nicht zu klein sein, wenn noch von ihm Schirmwirkungen hervorgebracht werden sollen.

Bei einem Abstand von 1 cm des Schirmes von der Röhre muss $L = \frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{3}\, l$ sein. Je weiter der Schirm von der Röhre fortrückt, um so länger muss der Schirm sein. Ist der Schirm zu kurz, so wird die Röhre in den Theilen angeregt, welche von dem Schirme weiter entfernt sind. Von ihnen aus werden dann, wie später genauer gezeigt werden wird, auch diejenigen Theile erregt, welche noch der Schirmwirkung des Metalles ausgesetzt sind; aus dem Leuchten der Röhre kann man hier also nicht schliessen, dass die Schirmwirkung fehlt, sondern nur, dass sie nicht ausreicht, jene Anregung zu unterdrücken.

6. Ebene Metallbleche schirmen, sowohl wenn ihre Ebene senkrecht steht zu der Ebene, die durch die leuchtende Röhre und die Condensatoraxe gelegt ist, als auch wenn sie irgend einen beliebigen Winkel mit derselben bildet, ja selbst wenn sie in dieser Ebene liegt. Ihr, der leuchtenden Röhre zugewandter Theil reducirt sich dann auf eine Linie, sie verhält sich wie ein Draht.

Aus diesem Verhalten erklärt sich z. B. das Resultat von Ed. Hagenbach und Zehnder[1]), dass ein Metallschirm, den sie zwischen den primären und secundären Spiegel bei dem Hertz'schen Spiegelversuch stellten, ebenso gut schirmte, wenn seine Ebene parallel, wie wenn sie senkrecht zu der Verbindungslinie der beiden Spiegel stand. Der das Metallblech *rings* umgebende electrodynamische Schattenraum erklärt das Ausbleiben der secundären Funken vollkommen, wenn der im Vergleich zu dem Spiegelabstande grosse und mit der Wellenlänge commensurabele Schirm überhaupt in dem Ausbreitungsgebiete der electrischen Wellen stand.

7. Leiter schirmen auch neben sich, was man in derselben Weise wie ihre Schirmwirkung vor ihnen nachweisen kann.

8. Leiter erster und zweiter Klasse üben in weiten Grenzen gleich gute Schirmwirkungen auf die hier betrachteten Oscillationen aus.

Ein leuchtendes Rohr E von 0,55 cm äusserem und 0,4 cm inneren Durchmesser und 30 cm Länge wird vor den Con-

---

1) Hagenbach-Zehnder, Wied. Ann. **43.** p. 610. 1891.

densatorplatten parallel der Axe derselben aufgestellt und ihm von der dem Condensator abgewandten Seite der schirmende Körper genähert (Fig. 2 *b*). Derselbe bestand aus einer 0,95 cm weiten Glasröhre, die 1. mit Luft von Atmosphärendruck, 2. mit normaler K Cl - Lösung (Leitfähigkeit $\lambda = 911 . 10^{-8}$), 3. mit Wasserleitungswasser, 4. cylindrischen, gegossenen $PbCl_2$-Stücken (λ viel kleiner als $0{,}4 . 10^{-8}$), 5. Quecksilber $\lambda = 1$ gefüllt war.

In der folgenden Tabelle ist *a* der Abstand des leuchtenden Rohres vom Condensator, *b* der Abstand des Schirmes vom leuchtenden Rohr, in dem sich noch eine deutliche Schirmwirkung geltend macht.

Nimmt *a* zu, so nimmt die Stärke der Erregung ab, nimmt *b* zu, so nimmt die Stärke der Schirmwirkung ab (letztere hängt aber auch von *a* + *b* ab, d. h. von dem Abstand des Schirmes vom Condensator).

$a = 0{,}5$ cm	*b*
1. Glasrohr	ohne Wirkung
2. K Cl-Lösung normal	1,8 cm
3. Wasserleitungswasser	0,2 „
4. $PbCl_2$	—
5. Quecksilber	1,8 „

$a = 2{,}0$ cm	*b*
1. Glasrohr	ohne Wirkung
2. K Cl-Lösung normal	4,0 cm
3. Wasserleitungswasser	0,3 „
4. $PbCl_2$	1,0 „
5. Quecksilber	4,2 „
6. Metallschirm (7 cm × 25 cm, die Längsrichtung lag parallel zur leuchtenden Röhre	ca. 4,0 „

Dass das Wasserleitungswasser so geringe Schirmwirkung ausübt, erklärt sich aus der sehr grossen Reinheit desselben.

9. Je enger die leuchtende Röhre ist, in um so grösserer Entfernung macht sich die Schirmwirkung eines angenäherten Metallschirmes geltend.

Eine 1,2 cm weite Röhre E_1 und eine 0,3 cm weite E_2 wurden nach einander parallel zu der Condensatoraxe so aufgestellt, dass ihre Axen 2 cm von den Plattenrändern entfernt waren und die Entfernung bestimmt, in der ein 25 cm langer, 6 cm breiter hinter die Röhren gehaltener Zinkschirm *M* (die Röhren lagen zwischen Schirm und Condensator, wie in Fig. 2 *b* angegeben ist) dieselben auslöschte. Es geschah dies in einer

Entfernung von der äusseren Rohrwand bei Rohr E_1 von 0,2 cm, bei Rohr E_2 von 1,5 cm. Die entsprechenden Entfernungen des Schirmes von der Rohraxe sind also bei Rohr E_1 0,8 cm, bei Rohr E_2 1,7 cm.

10. Bei abnehmender Stärke der in einem Rohr erregten Oscillationen genügt eine geringere Schirmwirkung, um das Leuchten zum Erlöschen zu bringen; ebenso bei zunehmender Schwierigkeit der Erregung, also bei zunehmendem Druck.

Um wenigstens ein Urtheil über diese Verhältnisse zu gewinnen, wurde wieder die bei 8 benutzte Anordnung (Fig. 2 *b*) verwendet. Die Röhre lag also zwischen Condensator und Schirm.

Vergrösserte man den Abstand *a* zwischen Röhre und Condensator, indem man den Condensator fortrückte, wodurch die Anregung des Rohres *E* abnahm, und näherte dann aus grossem Abstand den Schirm, bis das Leuchten verschwand, so trat dies bei einem grösseren Abstand *b* ein, als wenn die Röhre *E* näher an dem Condensator lag. Die Schirmwirkung von *M* ist hier vergrössert, wie aus dem grösseren Abstand von Rohr und Schirm hervorgeht; und zwar trotzdem die Erregung auf *M* vermindert ist, weil der Schirm selbst weiter von dem Condensator entfernt steht. Bei einem so hohen Drucke, dass das Rohr eben aufleuchtete, ergab sich

$$a = 5 \quad b = 30 \text{ mm.}$$

Bei einem tieferen Drucken

$$a = 0,\ b = 8;\ a = 10,\ b = 10;\ a = 20,\ b = 16;$$
$$a = 30,\ b = 19;\ a = 40,\ b = 26 \text{ mm.}$$

Aus diesen und zahlreichen ähnlichen Versuchen geht hervor: Je schwächer ein Rohr angeregt wird, je weiter es sich z. B. von dem Condensator befindet, bez. je höher der Druck ist, um so weiter kann auch der auslöschende Schirm von dem Rohre entfernt sein, eine umso geringere schirmende Wirkung genügt zur Auslöschung. Während also für Oscillationen grösserer Intensität der Schirm noch keine vollkommene Schattenwirkung ausübt, ist dies für solche von geringerer Intensität bereits der Fall.

Durch solche Versuche kann man die Empfindlichkeit der Anregung unter den verschiedensten Verhältnissen studiren.

B. Schirmwirkung leuchtender Gase.

Ganz ähnlich wie im Vorhergehenden die Schirmwirkung von Leitern der ersten und zweiten Klassen durch ihre Wirkung auf empfindliche Röhren nachgewiesen wurde, lässt sich zeigen, dass auch ein Gas, sobald eine genügende Anzahl seiner Molecüle genügend intensive, durch electrische Oscillationen angeregte Leuchtbewegungen ausführten, solche Schirmwirkungen in seiner Umgebung hervorbringt.

Um die Erscheinungen möglichst rein zu erhalten wurde folgende Anordnung gewählt (Fig. 3).

11. An die 6 cm von einander entfernten Condensator-platten T_1 und T_2 wurde ein parallelpipedischer mit der Luftpumpe verbundener allerseits geschlossener Glastrog K mit quadratischer Basis (Seite 2 cm) und 8 cm Länge mit seiner Längsaxe parallel zu der Condensatoraxe angelegt. An der Berührungsstelle waren auf denselben Stanniolstreifen quer auf die Anlegefläche geklebt (in der Figur durch dickere Striche angedeutet), um die Oscillationen nicht nur an einem Punkte eintreten zu lassen. Hinter K wurde das empfindliche Rohr E (Länge 12 cm, Weite 2 cm, $p = 0{,}18$ mm) gehalten. R ist wieder das Anregrohr.

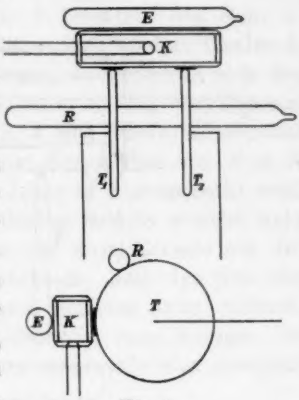


Fig. 3.

Bei dem Druck $p = 18{,}5$ mm im Troge K beginnt das Gas in demselben zu leuchten, und zwar spannt sich ein Bogen röthlichen Lichtes von der Berührungsstelle der einen Condensatorplatte zu der der anderen. Das Rohr E leuchtet, es wird also nicht von dem Gas in dem Troge geschirmt, der Trog nimmt nur verhältnissmässig wenig Energie auf. Die Erscheinung im Einzelnen wird in der nächsten Abhandlung beschrieben werden.

Es sei hier aber schon erwähnt, dass, wenn man das Rohr E entfernt und es dann dem Trog wieder nähert, dass dann das

röthliche Licht im Trog von der Lichtsäule in dem Rohr angezogen wird.

Bei $p = 11,8$ findet schon fast vollkommene Schirmwirkung statt, nur hin und wieder leuchtet noch das Rohr *E* auf.

Bei etwas niedrigerem Druck hört *E* ganz auf zu leuchten, die Schirmwirkung von *K* ist vollständig.

Bei $p = 0,30$ hört das Leuchten im Troge auf und damit auch die Schirmwirkung, das Rohr *E* leuchtet wieder hell.

Die Versuche lehren, dass eine wirksame Schirmwirkung nur dann ausgeübt wird, wenn eine hinreichende Anzahl von

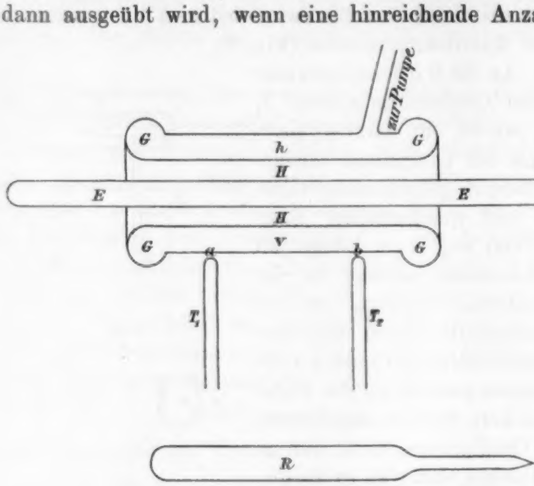


Fig. 4.

Molecülen in genügender Stärke Energie absorbirt; also weder bei zu hohen noch zu tiefen Drucken.

12. In etwas einfacherer, wenn auch theoretisch nicht so übersichtlicher Art lassen sich die Versuche folgendermaassen anstellen:

Ein engeres, 3 cm weites Gasrohr (Fig. 4) ist in ein weiteres 5,5 cm weites Glasrohr gesteckt, beide sind mit ihren Rändern so miteinander verblasen, dass ein doppelwandiger cylindrischer Mantelraum *G* entsteht. Derselbe communicirt durch ein seitlich angeschmolzenes Glasrohr mit der Pumpe. Die Länge des Mantels ist 11 cm. In den von dem Mantel *G* umgebenen

innersten, mit Zimmerluft erfüllten Hohlraum H wurden engere und weitere evacuirte Röhren E von verschiedenen Durchmessern und Längen oder auch Metallcylinder gelegt. Das Rohr G wird vor den Condensatorplatten T_1 und T_2 aufgestellt; an den Condensator ist eventuell noch eine anregende Röhre R mit ihrer Axe parallel der Condensatoraxe angelegt.

In dem doppelwandigen Rohr G lag z. B. ein 2 cm weites und 12 cm langes Rohr E mit Luft von dem Drucke 0,18 mm.

Bei hohen Drucken leuchtet nur E. Bei Drucken von etwa 2 mm leuchtet nur G. Hier wird also E durch G geschirmt.

Bei Drucken von $p = 0{,}47$ mm im Mantel G leuchteten die beiden Röhren gemeinschaftlich.

Bei dem Drucke $p = 0{,}034$ in G leuchtete das Rohr G nur an den von den Condensatorplatten abgewandten Theilen h. Zieht man das innere Rohr E heraus, so verbreitet sich das Licht auch nach den vorderen Theilen v, an den dem Condensator zunächst liegenden Stellen a, b sind dunkle Einschnitte in der Lichtsäule zu sehen. Beim Einschieben von E in H sieht man ausgezeichnet, wie das Licht in v ausgelöscht wird, es schirmt also E nach vorn. Offenbar sind in v nicht mehr genügend viele Molecüle vorhanden, um soviel Energie aus den ankommenden Oscillationen aufzunehmen, dass das Gas hier zum hinreichend kräftigen Leuchten kommen kann; vielmehr wird ein grosser Theil der Feldenergie zum Anregen des Rohres E verwendet, welches nun seinerseits eine genügend starke Schirmwirkung ausübt.

Ersetzt man das Rohr E durch einen Metallstab, so schirmt er in gleicher Weise wie das Gas, wie es nach den früher beschriebenen Versuchen zu erwarten war.

13. Die Erscheinung, dass mit abnehmendem Drucke die Anregbarkeit der Gase sich so sehr ändert, dass sie bei hohen Drucken fast Null ist und dann verhältnissmässig rasch steigt, lässt sich folgendermaassen erklären: Gasmolecüle können nur dann von Oscillationen zum Leuchten angeregt werden, wenn eine grössere Zahl der letzteren die Molecüle auf der freien Wegstrecke, d. h. zwischen zwei Zusammenstössen des Molecüls treffen, sonst wird die Energie der zwischen zwei Zusammenstössen erregten Oscillationen in andere Energieformen transformirt, ehe sie noch einen beträchtlichen Werth erreicht hat,

dadurch wird es unmöglich, dass die Amplitude der Oscillationen im Molecül eine merkliche Grösse erlangt.

Bei dem Atmosphärendruck ist die mittlere freie Weglänge der Sauerstoffmolecüle von der Ordnung 10^{-5} cm, die Geschwindigkeit derselben $5 . 10^4$ cm, die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen ist von der Ordnung 10^{-8} Sec., die Oscillationen im Resonanzkreise haben eine Schwingungsdauer von etwa 10^{-8} Sec. Zwischen zwei Zusammenstössen wird also nur *eine* Oscillation die Molecüle erregen. Evacuiren wir bis auf etwa $^1/_{100}$ Atmosphäre, also etwa auf 10 mm Druck, so werden die Molecüle zwischen zwei Zusammenstössen von 100 Oscillationen erregt, und in der That sind in diesem Bereich die Gase schon recht anregbar.

Legen wir ferner unser Anregerohr *R* an die Leitungsdrähte, so wird ein Theil der Oscillationen in solche von Schwingungsdauern von der Grössenordnung 10^{-11} Sec. umgewandelt (vgl. o. p. 38), von denen eine weit grössere Zahl auf das Intervall zwischen zwei Zusammenstössen kommt. Sie werden daher, wenn sie die Molecüle treffen, diese wesentlich geeigneter zur Aufnahme von Energie aus den Oscillationen des Resonanzkreises machen.

Dass andererseits ein Gas bei zu grosser Verdünnung nicht mehr schirmt, liegt wohl daran, dass hierzu überhaupt eine gewisse Energiemenge dem Felde entnommen werden muss, die dann in dem Gase in andere Energieformen als die der Feldenergie umgewandelt wird; sind zu wenig Molecüle da, so ist der aufgenommene, von ihnen transformirte Betrag zu gering, um in der Umgebung bemerklich zu werden.

14. Leuchtende Röhren üben auf andere leuchtende Röhren Schattenwirkungen vor sich aus. Die leichter erregbaren weiteren Röhren bringen die engeren schwerer erregbaren zum Erlöschen.

Von zahlreichen Messungen theilen wir die Folgenden mit. Untersucht wurden drei Röhren von der Länge 30 cm und den Durchmessern 1. $d_1 = 1,2$ cm, 2. $d_2 = 0,8$ cm, 3. $d_3 = 0,3$ cm, ihre Axen lagen parallel der Axe des Endcondensators.

Stellt man Rohr 2 und 3 etwa im Abstand von 1 cm von den Plattenrändern des Endcondensators auf und nähert ihnen Rohr 1, so erlöschen sie bei einem Abstand von b cm, und zwar Rohr 3 bei $b = 1,5$ cm, Rohr 2 bei $b = 0,5$ cm.

Dabei zieht sich wie beim Annähern von Metallschirmen die Lichtsäule in dem erlöschenden Rohr von aussen nach der Mitte zusammen. Das Licht erlischt zuletzt plötzlich; unmittelbar vor dem Erlöschen ist die Helligkeit noch ziemlich gross.

Auch ein mit einem leuchtenden Gase erfülltes Rohr übt also in seiner Umgebung eine Schirmwirkung aus.

Der Schatten liegt um das leuchtende Rohr rings herum.

Die leuchtenden Röhren verhalten sich also in dieser Hinsicht wie Metallschirme. Hieraus aber ohne weiteres schliessen zu wollen, dass den leuchtenden Gasen („phosphorescirender Luft") eine Leitfähigkeit im gewöhnlichen Sinne des Wortes, der metallischen analog zukomme, würde ungerechtfertigt sein, da einmal, wie oben gezeigt, die Eigenschaft der Leitfähigkeit hier überhaupt eine untergeordnete Rolle spielt, und andererseits der ganze Vorgang der Schirmwirkung offenbar auf rein electrodynamische Erscheinungen zurückzuführen ist, die in gewissem Sinne bei den Leitern anders verlaufen, als bei den Dielectricis.

15. Eine erste leuchtende Röhre E' kann eine zweite E'' zum Leuchten anregen, diese kann dann aber durch die Schirmwirkung von E' selbst wieder ausgelöscht werden. In grösserer Entfernung erregt E' die Röhre E'', in kleinerer löscht E' die Röhre E'' aus.

Versuche, die dies z. B. beweisen, kann man mit den unter 13. beschriebenen Röhren anstellen.

16. Versuche, die sich hier anschliessen, kann man sehr schön innerhalb des Mantelrohres G (Fig. 4) anstellen; sie ergeben zugleich das am Ende dieses Abschnittes gegebene Resultat.

Legt man in den Hohlraum H eine evacuirte Röhre E_1 von 1,2 cm Durchmesser und von 10 cm Länge, die also vollkommen innerhalb des Hohlraumes liegt und die Gas von passendem Drucke enthält, so beobachtet man Folgendes:

Bei einem Drucke $p = 1$ mm bildet sich in dem Mantelraum G für sich zunächst den Condensatorplatten ein helles rothes Lichtband aus, welches fast bis in die von dem Condensator abgelegene Hälfte desselben reicht.

Legt man, während der Raum G leuchtet, die Röhre E_1 in den Raum H, so leuchtet sie nicht. Das leuchtende Gas

schirmt also E_1. Leitet man den Condensator mit den Fingern ab und bringt dadurch G zum Erlöschen, so leuchtet nach Aufheben der Ableitung zunächst E_1 auf, und zwar stets hell, dann G, und in demselben Moment erlischt E_1 wieder vollständig.

Das nicht leuchtende Gas in G schirmt also E_1 nicht, wohl aber das leuchtende.

Verschiebt man die Brücke von der einen oder anderen Seite nach der Stelle S hin, wo die Erregung von Entladungsröhren am Endcondensator am stärksten ist, also nach dem Knoten $k_0{}^0$, so spricht stets zuerst E_1 an, dann setzt aber fast momentan das Leuchten in G ein, wodurch E_1 sofort wieder ausgelöscht werden.

Ist $p = 0{,}33$ mm, so leuchten die Röhren E_1 und G abwechselnd auf; leuchtet die eine auf, so ist die andere dunkel.

Leitet man den Condensator mit der Hand ab und nimmt sie wieder fort, so leuchtet E_1 länger, als bei dem höheren Druck, ehe das Leuchten von G und das Erlöschen von E_1 eintritt. Nähert man die Brücke der Stelle S, so leuchtet zunächst nur die innere Röhre E_1 auf, bei weiterer Annäherung auch das äussere Rohr G, dann erlischt E_1.

Bei tieferen Drucken beginnen dunkle Schattenräume um die Condensatorplatten sich auszubilden, bei einem Druck $p = 0{,}01$ mm reichen sie bis in die vom Condensator abgewandte Hälfte des Mantelraumes.

Ist E_1 oder E_2 nicht eingeschoben, so ist G ganz dunkel. Beim Einschieben von E_1 leuchtet G an dem von dem Condensator abgewandten Stellen, E_1 leuchtet stets. Zwischen E_1 und dem Condensator liegen jetzt keine leuchtenden Gastheile, und da E_1 mit Gas von höherem Druck erfüllt ist, so erstrecken sich die Schattenräume nicht so weit in dieses hinein.

Ganz dieselben Resultate erhielt man mit einem Rohr E_2 von demselben Durchmesser wie E_1, in dem das Gas ebenso weit evacuirt war wie in E_1, das aber 30 cm lang war, also auf beiden Seiten über den Hohlraum hinausragte. In den nicht geschirmten herausragenden Stellen ist hier die Anregung zu schwach, um ein Leuchten hervorzurufen und damit eine Anregung der im Innern des Hohlraumes gelegenen Theile zu bewirken (vgl. p. 10).

Aus diesen Versuchen lässt sich der Satz ableiten: Die verdünnten Gase an sich schirmen nicht, sondern erst, wenn sie durch die Oscillation zum Leuchten gebracht sind.[1])

Das Gesammtergebniss vorstehender Versuche lässt sich dahin zusammenfassen:

Um die Leiter bildet sich unter dem Einflusse einfallender Oscillationen ein *Schattenraum* aus und zwar hinter denselben, neben denselben und vor denselben. Anregbare Körper, die sich in diesem Schattenraum befinden, werden in ihm nicht angeregt, wenn nicht ihre Erregungsfähigkeit zu gross ist im Verhältniss zu der Schattenwirkung an der Stelle, an der sie sich befinden. *Leuchtende* Gase nehmen an dieser Eigenschaft der Leiter Theil.

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., Febr. 1893.

1) Eine Reihe Beobachtungen nach dieser Richtung ist zwar bereits von J. Moser (Compt. rend. **110.** p. 397; Beibl. **14.** p. 409. 1890) und J. J. Thomson (Phil. Mag. [5] **32.** p. 321 u. 445. 1891; Beibl. **16.** p. 560. 1892) angestellt worden, da dieselben aber die schnell gedämpften und unregelmässig verlaufenden primären Schwingungen verwendeten, so stellen sich der sicheren Deutung ihrer Resultate Schwierigkeiten in den Weg. Ein Verschwinden von Leuchterscheinungen kann, wie wir später zeigen werden, bei niederen Drucken durch sehr verschiedene Umstände bedingt sein, sodass aus demselben an sich noch nicht auf eine Schirmwirkung geschlossen werden kann. Wir werden dort auch noch eingehender auf die Versuche von Moser und J. J. Thomson eingehen.

3. *Ueber die Gesammtemission glühenden Platins;* *von F. Paschen.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1 u. 2.)

Die Abhängigkeit der Strahlung fester Körper von der Temperatur ist seit geraumer Zeit Gegenstand vieler experimenteller und theoretischer Arbeiten gewesen, ohne dass irgend eine Beziehung sicher nachgewiesen ist. Die Versuche, welche vorliegen, haben keine übereinstimmenden Resultate ergeben. Theils waren die Versuchsbedingungen sehr complicirt, wie bei den Messungen der Abkühlungsgeschwindigkeit (Dulong und Petit[1]), de la Provostaye und Desains[2]), Narr[3]), Grätz[4])) und bei den Messungen der in Strahlung umgesetzten Stromenergie (Schleiermacher[5]), Bottomley[6])), theils mangelte es an einer genügenden Temperaturbestimmung, wie bei den Draper'schen[7]) und Tyndall'schen Versuchen. Die neuesten Messungen von den Hrn. Schleiermacher und Bottomley einerseits und andererseits von Hrn. Schneebeli[8]) stimmen nicht überein.

Als Formeln, welche den Zusammenhang zwischen der Strahlung und der Temperatur darstellen sollen, sind zu nennen: 1) die empirische Formel von Rossetti[9])

$$S = (a\,T_2^{\,2} - b)(T_2 - T_1);$$

in welcher bedeuten S die durch eine Thermosäule gemessene Strahlung, T_2 die absolute Temperatur des strahlenden Körpers (eines mit Wasser oder Quecksilber gefüllten Leslie'schen Würfels), T_1 die absolute Temperatur der Thermosäule; a und b

1) Dulong u. Petit, Ann. de chim. et de phys. **7.** 1817.
2) de la Prorostaye u. Desains, Pogg. Ann. **68** u. **69.**
3) Narr, Pogg. Ann. **142.**
4) Grätz, Wied. Ann. **11.**
5) Schleiermacher, Wied. Ann. **26.** p. 287. 1885; **34.** p. 623. 1888.
6) Bottomley, Phil. Trans. Roy. Soc. London. **42.** p. 357—359. 1887.
7) Draper, Phil. Mag. (3) **30.**
8) Schneebeli, Wied. Ann. **22.** p. 403. 1884.
9) Rossetti, Reale Acc. dei Lincei (3) **2.** p. 64. 1878.

sind zwei Constanten, $a = 3{,}351 \,.\, 10^{-6}$, $b = 0{,}0637$ sind ihre Werthe, welche aus den Versuchen abgeleitet wurden. Die Versuche erstrecken sich auf Temperaturen zwischen 0° und 300° C. Die Formel soll auch für höhere Temperaturen gelten. Doch können die hierzu von Rossetti angestellten Versuche wohl nur als sehr unvollkommen bezeichnet werden.

Zweitens stellte Hr. Stefan[1]) eine andere Formel auf, welche mit allen damals vorliegenden Messungen im Einklange stand:

$$S = c\,(T_2^4 - T_1^4).$$

c ist eine Constante, die anderen Bezeichnungen sind die gleichen, wie in der erwähnten Rosetti'schen Formel. Obwohl die Stefan'sche Formel ihrer Form nach vor der Rosetti'schen den Vorzug verdient, so ist sie von Stefan zunächst nur als eine empirische Beziehung aufgestellt, die vielen Messungen gerecht wird. Aber Boltzmann[2]) hat diese Formel dann auch aus der electromagnetischen Lichttheorie abgeleitet. Schneebeli's Messungen bestätigten diese Formel. Schleiermacher fand sie nicht gültig.

Die dritte Formel schliesslich ist von Hrn. H. F. Weber[3]) aufgestellt. Sie soll alle bisherigen Messungen innerhalb der Fehlergrenzen wiedergeben. Die Formel lautet für den Fall, dass die Umgebung des strahlenden Körpers die absolute Temperatur T_1 hat:

$$S = C\,.\,F(e^{a T_2}\, T_2 - e^{a T_1}\, T_1).$$

C ist eine Constante, F die Grösse der strahlenden Fläche und e die Basis der natürlichen Logarithmen, a eine Constante.

Besonders mit den Messungen von Schleiermacher stimmt diese Formel gut.[4]) Mit Schneebeli's Resultaten ist sie nicht verglichen. Da diese aber das Stefan'sche Gesetz befolgen und von den Schleiermacher'schen Werthen abweichen, kann die Weber'sche Formel Schneebeli's Messungen

1) Stefan, Wien. Ber. (1) **79.** p. 391. 1879.

2) Boltzmann, Wied. Ann. **32.** p. 31 u. 291. 1884.

3) H. F. Weber, Berl. Ak. Ber. **2.** p. 933. 1888.

4) Auch Hr. W. Leconte Stevens (Am. Journ. of Sc. (3) **44.** p. 431. 1892) findet mit der Thermosäule für die Strahlung von Eisen zwischen 15° C. und 110° C. eine bessere Uebereinstimmung mit der Weber'schen Formel, als mit einer anderen.

nicht wiedergeben. Schneebeli's Versuchsanordnung (die Strahlung einer Luftthermometerbirne auf ein Bolometer) war einfacher, als diejenige Schleiermacher's. Welche Messungen indess als richtiger anzusehen sind, dürfte schwer zu entscheiden sein, weil Schneebeli eine Fehlerquelle hatte, die er auch nennt, deren Wirkung aber unübersehbar ist. Auch Weber's Formel ist eine empirische, da ihre Begründung nur durch den Nachweis ihrer Uebereinstimmung mit gewissen Versuchen geschieht.

Um die Sache experimentell zu behandeln, ist es offenbar nöthig, die Temperatur zu kennen, welche die strahlende Oberfläche hat. Dies ist nun überhaupt zur Zeit unmöglich; aber man kann Verfahren anwenden, bei welchen man sehr nahe diese Temperatur misst. Versuche mit thermometerartigen Gefässen sind offenbar sehr ungünstig. Infolge ihrer Strahlung und durch Luftströmung wird die Oberfläche, zumal bei schlechten Wärmeleitern, eine niedere Temperatur haben, als die Füllung, auf deren Temperatur sich die Messung erstreckt. Bei den Abkühlungsversuchen wird z. B. sicher die Temperatur zu hoch gemessen. Dies ist der Einwand, dem auch Schneebeli's Messungen unterliegen, besonders, da er selbst schreibt, dass durch Aufziehen der Klappe zwischen dem Porzellangefäss des Luftthermometers und dem Bolometer der Druck im Manometer etwas sank. Gerade die strahlende Fläche wurde hierbei kälter. Wieviel, entzieht sich der Beurtheilung; aber man muss schliessen, dass Schneebeli zu kleine Strahlungen erhalten hat. Einwandfrei scheint dagegen Schleiermacher's Temperaturmessung. Der strahlende Körper ist hier ein im Vacuum glühender Platindraht. Seine Temperatur wird aus dem electrischen Widerstande gefolgert. Dies wird auch die Temperatur der strahlenden Oberfläche sein.

Eine Anordnung, welche gerade in dieser Beziehung ebenso wie die Schleiermacher'sche günstig ist, habe ich kürzlich beschrieben.[1]) Zwei übereinandergelegte Platinbleche werden

1) F. Paschen, Wied. Ann. **48.** p. 272. 1893. In dieser Abhandlung sind folgende Druckfehler zu verbessern: p. 277 Z. 5 v. o. lies „überragten“ statt „überragte“; p. 281 Z. 4 v. u. lies „dicke“ statt „Dicke“; p. 285 Z. 1 v. u. lies „empfindlichen“ statt „empfindlicheren“; p. 286 Z. 6 v. u. lies „0,04 Amp.“ statt 0,004 Amp.“

durch den electrischen Strom erhitzt. Sie stehen vertical in freier Luft und sind nur vor unregelmässigen Luftströmungen geschützt. Es stellt sich eine völlig stationäre Temperatur her. Zwischen den Blechen befindet sich die Löthstelle eines geeigneten Thermoelementes. Da alles gut Wärme leitendes Metall ist, und da die strahlende Oberfläche in gleicher Weise, wie das Innere, vom Erhitzungsstrome durchflossen wird, so muss die Oberfläche nahe dieselbe Temperatur wie das Innere haben. Nach einer Rechnung Edlund's[1]) kann der Temperaturunterschied zwischen der Oberfläche und dem Inneren höchstens hundertstel Celsiusgrade betragen.

Das vertical gestellte 4 cm lange Platinblech erscheint beim Glühen in seinen mittleren Theilen auf einer Strecke von etwa 2 cm gleich hell. In der Mitte dieser gleichmässig temperirten Strecke ist das Thermoelement eingeführt. Durch geeignete Blenden kann nur die nächste Umgebung der Einführungsstelle des Thermoelementes auf ein Bolometer strahlen.

Ist die Temperaturermittelung eine richtige, so lässt der Versuch in dieser Anordnung weiter keinen Einwand zu, als dass der Bolometerstreif ein selectives Absorptionsvermögen besitzen kann. Hierüber lässt sich allerdings zur Zeit nichts sagen. Diese Unsicherheit haftet an allen bolometrischen Messungen, welche Strahlungen miteinander vergleichen, die aus verschiedenen Wellenlängen in verschiedener Weise zusammengesetzt sind.[2]) Es schien mir aber trotzdem wichtig, den Versuch zu machen.

Als Bolometer diente das in meinem citirten Aufsatze eingehend beschriebene. Es bestand aus 0,001 mm dickem, mit Petroleumruss geschwärztem Platinblech. Das Galvanometer ist das ebenfalls l. c. eingehend beschriebene. Bei einer Scalenentfernung von 2 m wurden zehntel Millimeter geschätzt. Die gewöhnlich benutzte ganze Schwingungsdauer betrug 5″, für die niedersten Temperaturen 7″. Der erste Ausschlag, der nach 3″ resp. 4″ beendet war, galt als Maass der Strahlung. Die Temperaturempfindlichkeit des Bolometers war etwa $0{,}0_4 1$

1) Edlund, Pogg. Ann. **158.** p. 153. 1876.

2) Es wäre schliesslich noch an ein selectives Absorptionsvermögen der von der Strahlung durchsetzten Luftschicht zu erinnern, obwohl dies wohl kaum für meine Messungen von Belang ist.

resp. $0{,}0_5 5^0$ C. pro 1 mm Ausschlag. Trotzdem die strahlende Fläche meistens nur wenige Quadratmillimeter gross war und vom Bolometer 70 cm entfernt stand, reichte diese Empfindlichkeit vollkommen aus. Für die höchsten Temperaturen musste sie durch Schwächung des Hauptstromes noch vermindert werden.

Die ersten Ausschläge des Galvanometers sind bei der beschriebenen Anordnung bis zu Ausschlägen von 400 mm proportional den Stromstärken, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht.

Ein Accumulator wurde durch einen grossen veränderlichen Widerstand *R* geschlossen. Von einem sehr kleinen Widerstande dieses Stromkreises zweigte man zum Galvanometer ab. Die Ströme, welche die Galvanometerrollen durchfliessen, sind dann umgekehrt proportional mit *R*. Eine Wippe liess den Ausschlag nach links (*l*) oder rechts (*r*) erfolgen.

R		10 000		5000		2500		1000		500		250	
		l	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*	*l*	*r*
Ausschläge	einzeln beob.	9,0	9,1	18,7	18,2	37,2	36,3	92,4	91,4	183,2	183,4	367,2	365,9
		9,0	8,8	18,4	18,1	37,1	36,6	92,3	91,6	183,5	183,0	367,1	366.2
	M.	9,0	9,0	18,6	18,2	37,2	36,5	92,4	91,5	183,4	183,2	367,2	366,1

Die Empfindlichkeit des bolometrischen Apparates wurde während jeder Versuchsreihe beständig controllirt. Dafür befand sich vor einem Bolometerzweige ein Nebenschluss von 10 000 Ohm, der sich entweder um 10, oder 20 oder 40 Ohm verändern liess.[1])

In einer Entfernung von 60 cm vor dem Streif des Bolometers befanden sich: 1. ein Spalt mit variirbarer Breite, und 2. je nach Bedürfniss Blenden verschiedener Oeffnung aus stark glänzendem Eisen-Zink-Blech; 3. unmittelbar vor diesen ein vom Fernrohr aus aufziehbares Fallbrett aus dickem blanken Metall. 8 cm vor diesem Schieber war der Platinstreif ausgespannt. Bei heruntergelassenem Schieber strahlten die blanken Blenden, deren Temperatur sich ausserordentlich wenig änderte, auf das Bolometer. Durch Aufziehen der Klappe

1) Vgl. K. Ångström, Oefversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. p. 379. 1888 und H. Rubens u. R. Ritter, Wied. Ann. **40.** p. 62. 1890

gelangte je nach Grösse der Blenden von einer 1—40 qmm grossen Fläche des Platinstreifs die Strahlung zum Bolometer.

Die Temperaturmessung ist durch weitere Aichungen mit siedendem Anilin, schmelzendem Blei und siedendem Schwefel für niedere und durch Berücksichtigung der von Holborn und Wien[1]) für Gold (1072° C.) und Silber (968°) gefundenen Schmelzpunkte für höhere Temperaturen verbessert. Ein weiterer Anschluss an die Arbeiten von Holborn und Wien war nicht möglich, da ich nicht chemisch reines Platin im Thermoelement hatte. Alles für die Temperaturmessung Wichtige findet sich in der folgenden Zusammenstellung. Es bedeuten: T_1 die Temperatur des Terpentinbades, in dem die zwei anderen Löthstellen liegen; T_2 die Aichungstemperatur in Celsiusgraden; n den Ausschlag des Galvanometers, welcher der Temperaturdifferenz ΔT entspricht. x bedeutet den Ausschlag in Millimetern pro 1° C. Temperaturdifferenz zwischen T_1 und T_2, wenn zwischen T_1 und 100° pro 1° C. Temperaturdifferenz 1 mm Ausschlag erfolgt: Beidemal vorausgesetzt, dass die Ausschläge proportional den Temperaturen sind. Die letzte Spalte stellt den Quotienten $n^{3/4} / \Delta T$ dar, der sich zwischen 400° und 1500° als constant erweist.[2]) Der unsichere Punkt für schmelzendes Platin fällt wieder heraus. Die Werthe dieser Quotienten wurden graphisch aufgetragen und durch einen im Anfange sich den Punkten anschmiegenden Curvenzug, von 427° an aber geradlinig verbunden. Diese Curve diente zur Ermittelung der Zwischenpunkte.

	T_1	T_2	ΔT	n	x	$n^{3/4} / \Delta T$
H_2O Sp.	25	100	75	17,58	1	0,11 447
Anilin Sp.	20	183	163	45,45	1,190	0,10 738
Pb Sm	22,2	326	303,8	99,42	1,396	0,10 363
S Sp.	19,9	447,5	427,6	154,5	1,542	0,10 249
Ag Sm	22	968	946	442,4	1,995	0,10 198
Au Sm	22	1072	1050	509,1	2,069	0,10 207
Pd. Sm	27	1500	1473	803,5	2,327	0,10 247
Pt. Sm	25	1775	1750	975,0	2,377	0,09 973

1) Holborn u. Wien, Wied. Ann. **47.** p. 107. 1892.

2) Diese empirische Beziehung, die natürlich nur für die von mir verwendete Platinsorte gültig ist, ist durch die von Holborn und Wien gefundenen Schmelzpunkte für Gold und Silber besser geworden (vgl. die ähnliche Zusammenstellung l. c. p. 289).

Bei der Messung der Temperatur des vom Strom durchflossenen Platinbleches trat die Schwierigkeit ein, dass immer ein Theil des Erhitzungsstromes durch den Kreis des Thermoelementes fliesst. Man kann dies durch Commutiren des Erhitzungsstromes zwar leicht eliminiren; aber wenn die in die Spalte zwischen den Blechen eintretenden Drähte nicht sehr nahe beisammenliegen, erhält man derartige Galvanometerablenkungen, dass eine Scala von 1 m Länge nicht ausreicht. Um mit einer solchen arbeiten zu können, habe ich früher viel Mühe auf das passende Einführen der Drähte in die Spalte verwenden müssen. Sie sollen so nahe wie möglich beisammenliegen, sich aber ausserhalb der Spalte nicht mehr berühren. Dies ist jetzt durch folgendes Verfahren sehr einfach geworden. Ehe die Drähte zusammengeschmolzen werden, klopft man jeden für sich am Ende in ein breites Bändchen aus: etwas bis zu einer Dicke von $^1/_{100}$ mm. Dann werden die zwei Bändchen aufeinandergelegt und am Ende zusammengeschmolzen. Die Schmelzstelle wird nochmals plattgeschlagen und durch geeignetes Beschneiden recht klein gemacht. Führt man sie nun in die Spalte zwischen den zwei Blechen ein, so ist es ein Leichtes, den vom Erhitzungsstrome herrührenden Zweigstrom durch geringes Verschieben eines der Drähte fast völlig zu vermeiden. Hat man solche Stellung des Thermoelementes gefunden, so steigert man die Temperatur des Platinbleches auf 1500° C. Dann schweisst die eingeführte Löthstelle an den Innenwänden so fest, dass sie sich nicht mehr, ohne zu zerreissen, herausziehen lässt. Darauf presst man die Blechwände noch gehörig an und achtet darauf, dass die Drähte sich bei ihrem Austritt aus der Spalte nicht berühren. Schliesslich vernichtet man durch Glühen der Drähte ihre Spannungen, damit sich die eingeführten Theile des Thermoelementes bei den Temperaturen, bei denen die an ihnen liegenden Plattenwände weicher werden, nicht verschieben.

Es ist mir der Einwand gemacht, dass die eingeführte Schmelzstelle des Thermoelementes die Temperatur der sie umgebenden Blechwände nicht ganz annehmen könnte. Die Schmelzstelle ist etwa $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ mm dick und 0,2 mm breit. Zu beiden Seiten fest angepresst liegen zwei Platinwände von je $^1/_{10}$ mm Dicke und 4 mm Breite. Die eingeführte Platin-

masse wird mit vom Strom durchflossen. Es ist an dieser Stelle kein Helligkeitsunterschied zu sehen. Auch glühen die heraustretenden Drähte noch etwa $^1/_4$ mm weit mit derselben Helligkeit, wie das Blech.

Die Schmelzstelle kann aus zwei Gründen eine niedere Temperatur haben; 1. infolge der durch sie auf einer Länge von 0,2 mm herbeigeführten Querschnittsvergrösserung um etwa 10 Proc.; 2. infolge der Wärmeableitung durch die zwei herausragenden Drähte. Ich habe früher, soweit es die Genauigkeit meiner Messungen gestattete, gefunden, dass man für einen gleichen Erhitzungsstrom immer dieselbe Temperaturangabe des Thermoelementes erhält, ob man die Drähte mehr oder weniger platt schlägt, ob man sie tiefer (bis 3 mm) einführt, oder nur $^1/_2$ mm tief.

Ich habe nunmehr noch den folgenden Versuch gemacht: Statt zweier übereinandergepresster Platinstreifen habe ich deren vier genommen und zwischen die zwei mittleren das Thermoelement eingeführt, sodass also jetzt beiderseits eine Platinwand von doppelter Dicke an der Löthstelle lag. Es war vorher bei dem zweifachen Blech der einer bestimmten Temperatur entsprechende Ausschlag gemessen. Nun wurde das vierfache Blech möglichst an die gleiche Stelle gesetzt, wo vorher das Doppelte stand, zur selben Temperatur erhitzt, und seine Strahlung gemessen. Es war dafür gesorgt, dass die gleiche Oberfläche, welche vorher strahlte, auch jetzt wieder vorne war. Es liess sich aber nicht vermeiden, dass sie sich beim Andrücken und Plattstreichen änderte. Ich erhielt so grosse Abweichungen. Bei einer Temperatur von 1170° C. gab das Blech von doppelter Dicke den Ausschlag 229 mm, darauf ein Blech von vierfacher bei gleicher Temperatur den Ausschlag 199 mm. Zu einem Ausschlage von 229 mm würde die Temperatur von 1206° C. nöthig gewesen sein. Doch ist dies sicher eine obere Grenze; denn bei einer nachherigen Besichtigung stellte sich heraus, dass gerade an der Stelle, wo das Thermoelement sass, das Blech infolge ungleichmässigen Querschnittes eine höhere Temperatur gehabt haben musste. Bevor ich die richtige Temperatur traf, hatte ich eine höhere genommen. Es zeigten sich nun im Innern, dort, wo das Thermoelement sass, die Blechwände aneinandergeschweisst,

sodass das Thermoelement beim Herausschaben zerriss. Die übrigen Theile des Bleches waren noch nicht aneinandergeschweisst. Ein neues Blech von vierfacher Dicke und von gleichmässigerem Querschnitt ergab für die Temperatur 1170° C. den Ausschlag 239,3 mm. Hier würde das Thermoelement bei dem Ausschlage 229 mm die Temperatur 1155° C. angezeigt haben: also sogar eine zu niedrige.

Der Versuch ist in dieser Weise bei meiner Anordnung nicht exacter zu machen. Denn erstens kann die Oberflächenbeschaffenheit des Platins bei dem zum Einsetzen des Thermoelementes nöthigen Verfahren geändert sein. Zweitens ist es nicht möglich, das Blech wieder so vor die Blenden zu setzen, wie es vorher stand. Ganz ähnliche Differenzen traten schon auf, wenn man das Blech fortnahm und wieder hinsetzte. Als nach den beschriebenen Versuchen ein Blech von doppelter Platindicke wieder eingesetzt war, ergab sich für die Temperatur 1170° C., der Ausschlag 217,2 mm. Dem Ausschlage 229 mm würde dann eine Temperatur 1184° C. entsprechen.

Der folgende Weg scheint besser, die Sache zu prüfen: Wenn das Thermoelement infolge der localen Qerschnittsvermehrung nicht völlig die Temperatur annimmt, welche die Bleche haben, so muss dies bei dem Blech doppelter Dicke unvollkommener geschehen, als bei demjenigen vierfacher Dicke. Die Curve, welche für das letztere Blech die Abhängigkeit der Strahlung von der Temperatur darstellt, muss der Wirklichkeit näher kommen, als bei demjenigen doppelter Dicke. Es zeigte sich nun, und wird weiter unten ausführlich belegt, dass beide Curven durchaus das gleiche Gesetz befolgen. Hiermit ist bewiesen, dass die locale Querschnittsvermehrung keine für meine Messungen merkbare Temperaturdifferenz erzeugt.

Es ist nun noch ein merkwürdiger Umstand zu erwähnen. Der Strahlungsausschlag zeigte sich abhängig von der Richtung des Erhitzungsstromes. Das Commutiren geschah in der Weise, dass dieselben zwei Kupferbügel in verschiedener Weise je zwei von vier Quecksilbernäpfen verbanden. Weiter wurde dabei nichts geändert. Der Widerstand des Stromkreises war also in beiden Fällen genau der gleiche. Bei einer Temperatur von 1150° C. ergab sich z. B. ein Ausschlag von 380 mm, wenn der positive Strom das Blech von unten nach

oben durchfloss, ein solcher von 370 mm für die umgekehrte Stromrichtung. Bei einer Temperatur von 810° waren diese Ausschläge 47,8 und 45,6 mm. Ich vermuthe, dass Thermoströme dies verursachen, die einmal den Accumulatorenstrom verstärken und ihn in der anderen Anordnung vermindern. Solche Thermoströme konnten z. B. durch folgenden Umstand eintreten: Die obere Klemme des Platinbleches befand sich in der heissen Luft, die vom Blech aus sie umströmte. Bei den ersten Versuchen kam es vor, dass sie rothglühend wurde, während man die untere Klemme noch anfassen konnte. Das obere Blech wurde deshalb nach hinten abwärts gebogen und durch einen Schirm vor der heissen Luft geschützt. Ferner umgab man die den Klemmen zunächst befindlichen Theile des Platinstreifs mit dickem Platinblech, sodass diese Theile sich durch den Strom weniger erhitzten. Auf diese Weise vermeidet man auch die Störungen, die durch Oxydation der mit *glühendem* Platin in Berührung stehenden Klemmentheile eintreten.

Die Verschiedenheit der Ausschläge wurde hierdurch wohl geringer, blieb aber immer noch bemerklich. Diese Verschiedenheit war ferner im Anfang einer Versuchsreihe geringer, sogar oft unmerklich, und trat erst nach längerem Glühen hervor. Man muss bedenken, dass die Strahlung mit einer hohen ($>$ 8.) Potenz der Stromstärke proportional ist. Aus diesem Grunde war die Accumulatorenbatterie von grossem Werthe.

Ich habe nun nichts anderes thun können, als abwechselnd bei den verschiedenen Stromrichtungen die Strahlungen messen und das Mittel nehmen. Eine Beobachtung verlief dann z. B. folgendermaassen:

Lage der Kupferbügel	×	=	×
Ausschlag des Thermoelements	576,0	565,6	577,0
Strahlungs-Ausschläge	225,0 225,3	227,5 228,8	225,5 225,3
Mittel	225,2	228,2	225,4
Ausschlag des Thermoelements	577,5	566,5	577,0
Temp. d. Terpentins ° C	19,5		19,8

Mittel: Thermoelement = 571,5 mm. Bolometer = 226,7 mm.

Die Ausschläge des Thermoelementes müssen natürlich auch, wenn auch weit weniger, durch die Verschiedenheit beeinflusst sein; dies entgeht aber infolge des vom Erhitzungsstrome herrührenden Zweigstromes, der überwiegt.

Das ganze durchmessene Temperaturintervall von 100° C. bis 1450° C. lässt sich nicht mit der gleichen Galvanometerempfindlichkeit durchmessen, wenn die Ausschläge 400 mm nicht übersteigen sollen. Demgemäss habe ich drei Gruppen von Messungen gemacht. Die eine Gruppe umfasst niedere Temperaturen von 100—600° C., die zweite mittlere von 350—950°, die dritte die höchsten Temperaturen von 600—1450° C. Aus einer Gruppe theile ich ausführliches Beobachtungsmaterial mit, aus den beiden anderen je die Resultate einer Messungsreihe.

Es bedeuten T' die Temperatur des Terpentins, n den reducirten Ausschlag des Thermoelementes. Die geringen Aenderungen im Kreise des Thermoelementes wurden mit einem zweiten Thermoelement mit Hülfe der Temperatur 100° ermittelt. Die Ausschläge wurden dann so reducirt, dass aus den oben p. 55 gegebenen Daten die Temperatur ermittelt werden konnte. ΔT ist die n entsprechende Temperaturdifferenz. T_2 ist die Temperatur des Platinbleches, T_1 die der Umgebung des Bolometers. S ist der Strahlungsausschlag. Die letzte Columne enthält den Ausdruck, der nach Stefan's Formel constant sein sollte.

Niedere Temperatur. Blech doppelter Dicke. Blendenöffnung horizontal = 2 mm, vertical = 2 cm.

T' ° C.	n	ΔT ° C.	T_2 ° C.	T_2 absol.	T_1 absol. = 273 +	S corr.	$(S / (T_2^4 - T_1^4))10^{10}$
17,2	23,0	92,9	110,1	383,1	16,0	2,63	1,809
17,3	32,4	122,5	139,8	412,8	16,3	4,63	2,099
17,5	43,3	156,4	173,9	446,9	16,4	8,06	2,452
17,7	72,8	237,1	254,8	527,8	16,4	21,14	2,998
17,8	110,9	330,8	348,6	621,6	16,5	55,65	3,911
18,0	147,3	412,2	430,2	703,2	16,6	114,2	4,810
18,2	174,2	468,2	486,4	759,4	16,7	181,1	5,566
18,3	193,4	506,5	524,8	797,8	16,9	246,7	6,200
18,5	230,2	577,4	595,9	868,9	16,6	399,7	7,105

Mittlere Temperatur. Blech vierfacher Dicke. Blendenöffnung horizontal = 2 mm, vertical = 9 mm.

T_1 absol.	T_2 absol.	S corr.	$[S/(T_2^4 - T_1^4)]\,10^{11}$
291,3	499,1	3,33	6,06
291,4	634,6	12,22	7,887
291,3	753,7	34,50	10,93
291,3	878,0	83,88	14,29
291,6	984,1	165,0	17,73
291,6	1058	244,4	19.61
291,6	1146	390,9	22,76
291,7	1054	239,6	19,53
291.8	908,1	101,3	15,05
291,8	797,0	47,27	11,93
291,9	618,3	10,75	7,745

Höchste Temperatur. Blech zweifacher Dicke. Blendenöffnung horizontal 2 mm, vertical 3 mm.

T_1 absol.	T_2 absol.	S corr.	$[S/(T_2^4 - T_1^4)]\,10^{11}$
288,9	871,4	8,83	1,55
289,0	986,5	18,27	1,94
289,2	1076	29,69	2,23
289,3	1227	61,22	2,710
289,3	1349	102,2	3,094
289,3	1493	173,2	3,487
289,3	1602	256,3	3,896
289,4	1066	28,80	2,243
289,7	1722	374,7	4,266
289,8	1072	29,43	2,240

Die verschiedenen Messungsreihen wurden nun zunächst innerhalb jeder Gruppe zur Berechnung einer mittleren Curve verwerthet. Alle Curven gehen durch Multiplication je mit einem gewissen Factor, in einander über. Dieser, für jede Reihe constante Factor ist graphisch ermittelt. Mit ihm sind die beobachteten Strahlungen jeder Reihe multiplicirt. Aus einer graphischen Darstellung entnahm man dann für gleiche Temperaturen die Ordinaten aus den verschiedenen Curven. Diese finden sich in der folgenden Zusammenstellung, in der also jede Verticalspalte eine Curve darstellt, die durch Multiplication mit einem constanten Zahlenfactor aus der beobachteten hervorgegangen ist. Dieser Zahlenfactor findet sich unter der Nummer der Reihe. Ebenso die mittlere Temperatur T_1 in ^{0} C.

Niedere Temperaturen.

Reihe Nr.	1	2	3	4	5	I	IV	V	VII	VIII	IX	
Factor	0,7167	1,000	1,067	2,478	5,705	2,78	5,286	32,99	1,329	5,115	2,727	Mittel
T_1 °C.	16,5	16,5	17,0	16,3	15,5	17,3	17,0	17,5	17,7	18,6	17,8	
T_2 °C.												
100	*4,3*	2,2	—	—	—	—	—	—	3,1	—	—	2,65
150	*6,7*	5,8	5,0	—	—	—	—	—	6,5	—	—	5,77
200	*11,3*	11,8	10,3	—	—	*25,8*	—	—	12,2	—	12,3	11,65
250	*17,8*	20,0	19,4	21,7	—	*35,0*	18,8	—	20,8	21,7	20,7	20,62
300	*29,7*	34,2	34,7	36,0	—	*46,5*	36,2	—	33,8	35,2	34,5	34,94
350	*46*	56,2	57,2	58,0	—	*60*	63,5	—	54,0	56,7	56,0	57,34
400	—	89,5	91,2	86,0	91,0	*85*	101,5	—	88,2	92,5	88,0	90,99
450	—	134	140,6	135,0	138	*120*	150,0	140,5	132	135,5	136	137,6
500	—	202	209,0	197,3	206	*176*	217	197	193,5	200	203	202,8
550	—	299	306,0	298,5	285	*251*	313	293	290	299	297	297,4
600	—	408	424	410,5	400	—	412	445	462	413,5	413	420,8

Mittlere Temperaturen.

Reihe Nr.	2	3	4	5	6	III	IV	VII	VIII	IX	
Factor	0,1925	0,2015	0,4864	1,095	2,101	0,9729	0,9834	0,2603	1,000	0,5343	Mittel
T_1 °C.	16,5	17,0	16,3	15,5	16,4	15,9	17,0	17,7	18,6	17,8	
T_2 °C.											
350	10,9	10,8	11,4	—	—	—	12,3	10,8	10,8	11,0	11,14
400	17,1	17,2	17,5	17,7	—	—	19,3	17,2	17,4	17,3	17,59
450	26,0	26,0	26,4	25,8	—	—	28,3	26,0	27,0	26,6	26,51
500	38,9	38,9	39,3	37,6	—	—	40,0	38,2	39,7	39,5	39,01
550	56,7	56,7	56,5	54,5	—	—	57,0	55,0	56,0	57,3	56,21
600	79,8	79,7	80,0	76,3	80,5	80,3	79,8	78,1	78,2	81,4	79,41
650	—	—	110,8	107,5	111	110,5	108,8	—	113	118	110,66
700	—	—	154,5	144	151	149	148	—	154	152	150,36
750	—	—	202	194,5	204	206	197	—	204	202	201,4
800	—	—	—	260	270	274	257	—	267	—	265,6
850	—	—	—	335	353	349	328	—	347	—	342,4
900	—	—	—	416	445	—	—	—	—	—	430,5
950	—	—	—	520	559	—	—	—	—	—	539,5

Hohe Temperaturen.

Reihe Nr.	8	5	4	6	7	III	IV	V	VIII	VI	II	
Factor	1,000	0,1224	0,05378	0,2314	2,188	0,1067	0,1111	0,6985	0,1096	1,042	0,5663	Mittel
T_1 °C.	16,3	15,5	16,3	16,4	17,3	15,9	17,0	17,5	18,6	17,3	16,5	
T_2 °C.												
600	9,0	8,7	8,6	9,0	—	9,0	9,0	9,2	8,4	—	*10,9*	8,86
650	12,2	12,0	12,2	12,3	—	12,0	12,3	12,3	12,0	—	*14*	12,16
700	17,0	16,2	16,8	17,0	—	16,4	16,4	16,6	16,4	—	*18,4*	16,6
750	22,0	21,2	22,5	22,6	—	22,0	22,1	22,3	21,7	--	*23,8*	22,05
800	29,0	28,2		29,6	—	29,2	29,3	28,9	28,5	29,6	*30,3*	29,04

Reihe Nr.	8	5	4	6	7	III	IV	V	VIII	VI	II	
Factor T_1 °C.	1,000 16,3	0,1224 15,5	0,05378 16,3	0,2314 16,4	2,188 17,3	0,1067 15,9	0,1111 17,0	0,6985 17,5	0,1096 18,6	1,042 17,3	0,5663 16,5	Mittel
850	38,5	36,3	—	38,0	—	37,8	37,6	36,7	36,6	36,8	*37,6*	37,26
900	48,5	46,1	—	48,2	—	—	—	47	—	47,5	*46,4*	47,46
950	59,5	56,8	—	60,0	—	—	—	58,3	—	60,0	*57,3*	58,92
1000	74,5	—	—	74,5	77,8	—	—	73	—	74,8	*71 2*	74,92
1050	91,5	—	—	—	95,4	—	—	89,7	—	92,4	*87*	92,25
1100	111,8	—	—	—	115,5	—	—	111,8	—	113,5	*105,3*	113,15
1150	135	—	—	—	136,5	—	—	136,8	—	137,0	*126*	136,3
1200	162,5	—	—	—	161,4	—	—	163,5	—	165,5	*150,7*	163,2
1250	195	—	—	—	191,3	—	—	192,5	—	198,5	*178,7*	194,3
1300	234	—	—	—	227,2	—	—	228,5	—	236,5	*210*	231,6
1350	273,5	—	—	—	273,2	—	—	277	—	282,0	—	276,4
1400	322	—	—	—	323,2	—	—	327	—	332	—	326,1
1450	375	—	—	—	372,6	—	—	377,8	—	391	—	379,1

In den Tabellen für niedere und hohe Temperaturen finden sich drei Reihen, welche etwas mehr von den anderen abweichen, als diese unter sich: die Reihen 1, I und II. Reihe 1 ist die erste mit doppeltem Blech beobachtete; bei der übrigens noch eine andere Störung vorhanden war. Reihe I und II stellen die zwei ersten Beobachtungen dar, die mit dem Blech vierfacher Dicke angestellt sind. Ich muss es unentschieden lassen, ob das Abweichen dieser Reihen daher rührt, dass die Oberfläche erst nach längerem Glühen bei hoher Temperatur eine constante Emissionsbeschaffenheit annimmt, obwohl es sehr plausibel scheint (nach längerem Glühen bei 1400° C. wird eine blanke Platinoberfläche matt). Alle anderen Reihen stimmen gut untereinander überein, und zwar war in den mit 1, 2, 3 . . . 8 bezeichneten Reihen das Blech von doppelter, in den mit I, II . . . IX bezeichneten Reihen von vierfacher Dicke. Beide Arten Reihen unterscheiden sich nicht (vgl. p. 58).

Mit Ausschluss der drei bezeichneten und in der Zusammenstellung mit *schrägliegenden Zahlen gedruckten* Reihen, über deren Abweichung ich keine sichere Rechenschaft geben kann, die aber doch ihrem Verhalten nach mit den anderen nicht vergleichbar scheinen, habe ich die übrigen zu mittleren Reihen vereinigt.[1]) Aus den drei mittleren Curven, welche

1) Diese mittleren Reihen beziehen sich also auf Platin, welches bereits vorher längere Zeit bei mindestens 1400° C. geglüht hat.

so für die drei Gruppen entstehen, lässt sich dann eine einzige Curve bilden, welche zwischen 100 und 1450° C. die Abhängigkeit der Strahlung S von der Temperatur T_2 darstellt. Diese Curve gebe ich hierunter. Die Temperatur des Bolometers schwankte bei den verschiedenen Messungen zwischen 15,5 und 18,6° C. Mit dem Mittel 17° C. oder 290° abs. Temp. habe ich die Constante der Stefan'schen Formel berechnet und mit angeführt. Man sieht, dass diese Grösse von $4 \cdot 10^{-11}$ bis $39 \cdot 10^{-11}$ in dem von mir untersuchten Temperaturintervall zunimmt.

Mittlere Curve der Strahlung von Platin als Function der Temperatur (T_1 = 290° abs.).

T_2 ° C.	100	150	200	250	300	350	400
T_2 abs. T.	373	423	473	523	573	623	673
S	0,508	1,106	2,234	3,954	6,696	11,07	17,52
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	4,15	4,43	5,21	5,84	6,65	7,67	8,85
T_2 ° C.	450	500	550	600	650	700	750
T_2 abs. T.	723	773	823	873	923	973	1023
S	26,45	38,95	56,62	80,25	110,7	150,8	201,1
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	9,94	11,11	12,53	13,99	15,40	16,96	18,48
T_2 ° C.	800	850	900	950	1000	1050	1100
T_2 abs. T.	1073	1123	1173	1223	1273	1323	1373
S	265,0	340,8	431,3	538,0	682,0	839,8	1031
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	20,10	21,53	22,87	24,10	26,05	27,47	29,05
T_2 ° C.	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450
T_2 abs. T.	1423	1473	1523	1573	1623	1673	1723
S	1241	1485	1769	2108	2516	2968	3451
$[S/(T_2^4 - T_1^4) \cdot 10^{11}]$	30,18	31,56	32,92	34,49	36,31	37,92	39,17

Besser, als Stefan's Formel, schliesst sich die Weber'sche meinen Werthen an, aber sie ist doch nicht geeignet, meine Beobachtungen genau darzustellen. Bis zu einer Temperatur von 1050° wächst die Strahlung des Platins nach meinen Messungen schneller, von hier an aber langsamer, als Weber's Formel erfordert. Diese Formel lässt sich für meine Versuche passend so schreiben:

$$S = C \,.\, F \,.\, e^{a \,.\, T_1} \,.\, T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} e^{a(T_2 - T_1)} - 1 \right).$$

a soll nach Weber für alle festen Körper den Werth 0,0043 haben. Da $T_1 = 290^0$ abs. ist, so kann man schreiben:

$$S = \mathfrak{C}\left(\frac{T_1}{290}\, e^{0{,}0043\,(T_1 - 290)} - 1\right),$$

wo $\mathfrak{C}$ eine neue Constante ist. In dieser Form habe ich sie benutzt und $\mathfrak{C}$ berechnet. Schliesslich habe ich noch die Constante a der Rossetti'schen Formel aus meinen Beobachtungen berechnet. Zum Vergleiche stelle ich die Resultate dieser Berechnungen in der folgenden Tabelle zusammen.

Berechnung der Constanten $\mathfrak{C}$ der Weber'schen und a der Rossetti'schen Formel.

T_1	$T_1 - 290$	S	$\frac{T}{290}\, e^{0{,}0043\,(T - 290)} - 1$	$\mathfrak{C}$	$a \, . \, 10^7$
423	133	1,106	1,590	0,6958	1,023
573	283	6,696	5,674	1,181	
723	433	26,45	15,05	1,757	3,662
873	583	80,25	35,95	2,233	
1023	733	201,1	81,50	2,467	6,50
1173	883	431,3	179,3	2,406	
1323	1033	839,8	386,5	2,172	10,61
1473	1183	1485	822,8	1,805	
1573	1283	2108	1349	1,563	15,48
1723	1433	3451	2817	1,222	

Auf Fig. 1, Taf. I, finden sich: 1. die beobachtete Curve, 2. eine nach Stefans, 3. eine nach Weber's und 4. eine nach Rossetti's Formel berechnete Curve. Die Curven sind nach zwei verschiedenen Maassstäben aufgetragen, um das Verhalten bei niederen Temperaturen hervortreten zu lassen.

Mit den Resultaten Schleiermacher's und Bottomley's stimmen meine Werthe nicht. Die Methode dieser Beobachter ergab ein langsameres Wachsen der Strahlung innerhalb des von ihnen untersuchten Temperaturintervalles etwa der Weber'schen Formel entsprechend. Den Grund hierfür weiss ich nicht.

Trägt man die Constante der Stefan'schen Formel als Function der Temperatur auf (Fig. 2, Taf. I, Curve 1), so erscheint diese Curve zwischen 400° C. und 1450° C. als gerade Linie; unterhalb 400° fällt diese Linie langsamer. In Curve 2 ist derselbe Ausdruck aufgetragen, wie er sich nach Schleiermacher's Messungen ergibt. Curve 3 stellt die Constante $\mathfrak{C}$ der Weber'schen Formel als Function der Temperatur dar.

Es wäre wichtig, diese Messungen mit einem schwarzen Körper anzustellen, da es möglich ist, dass sich das Emissionsvermögen der Metalloberfläche mit der Temperatur so stark ändert, dass infolgedessen die Abweichung von einem der Strahlungsgesetze entsteht.

Ich habe daher den Platinstreif auf der zum Bolometer strahlenden Fläche über der Petroleumlampe berusst, und zwar nur so stark, dass eben jeglicher metallischer Glanz verschwand, und die Fläche tief schwarz erschien. In dieser Anordnung konnte man das Platin über 500° C. erhitzen, ohne dass der Russ verbrannte. Die Messungen, welche mit ihm angestellt sind (2), sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Die letzten beiden Horizontalspalten derselben enthalten die aus den Beobachtungen berechneten Constanten der Formeln von **Stefan** und **Weber**.

Die Strahlung des Russes. $T_1 = 288{,}3$ abs. Blenden von 2×9 mm.

T_2 ° C.	78,3	100	150	200	250	300	350	400	450	492,4
T_2 abs. T.	351,3	373	423	473	523	573	623	673	723	765,4
S	8,23	12,7	26,9	48,4	81,3	126	186	269	389	506,2
$(S/(T_2^4 - T_1^4))10^{10}$	9,82	10,23	10,72	11,21	11,97	12,49	12,94	13,58	14,61	15,06
$\mathfrak{C}$	13,76	14,73	16,64	18,39	20,44	21,88	22,93	24,00	25,50	25,78

Es ergibt sich auch hier ein schnelleres Steigen (für niedere Temperaturen), als nach einer der beiden Formeln zu erwarten ist. Aber die Zunahme der Strahlungsintensität mit der Temperatur ist langsamer, als beim Platin, liegt also dem **Stefan**'schen oder **Weber**'schen Gesetz näher. In Fig. 2, Curve 4 und 5 ist die **Stefan**'sche, bez. **Weber**'sche Constante als Function der Temperatur gezeichnet. Das Gesagte geht aus dieser Zeichnung hervor.

Bei dieser Anordnung ist nun Folgendes zu bemerken. Da die strahlende Russschicht nicht selber mit vom Strome durchflossen wird und dazu ein schlechter Wärmeleiter ist, aber ein etwa zehnmal grösseres Emissionsvermögen als Platin hat (wenigstens bei den untersuchten Temperaturen), so ist zu schliessen, dass die Temperatur der strahlenden Fläche sicher niedriger ist, als die des Platins: um welchen Betrag, ist schwer zu sagen. Die Differenz wird aber mit steigender Temperatur grösser werden; folglich muss ein zu langsames Wachsen der Strahlung beobachtet werden. Ich schliesse

hieraus, dass auch Petroleumruss weder dem Stefan'schen, noch dem Weber'schen Gesetze folgen kann, sondern ein ähnliches Gesetz befolgt, wie Platin.

Bemerkenswerth ist noch folgende Erscheinung. Die Temperatur des einseitig berussten Platinstreifs war bis etwa 650° C. gesteigert, und der Strahlungsausschlag betrug über 300 mm Scalentheile. Da trat ein Schwanken und eine schnelle Abnahme in der Strahlung ein, bis der Ausschlag nur mehr 125 mm betrug. Zugleich stieg aber die Temperatur des Bleches auf ca. 700° C. Es zeigte sich, dass der Russ vom Platinblech fortgebrannt war. Trotz höherer Temperatur gab die Platinoberfläche dreimal kleinere Platinausschläge. Bei gleicher Temperatur und gleichen Blenden gab Russ ca. zehnmal grössere Ausschläge, als Platin. Wenn aber die Strahlung des Platins schneller mit der Temperatur zunimmt, als die des Russes, wie es nach meinen Versuchen immerhin wahrscheinlich ist, so müssen diese Unterschiede bei höherer Temperatur kleiner werden.

Ich füge noch eine Zusammenstellung über die Zunahme der Intensität homogener, vom Platin ausgesandter Strahlungen hinzu, die ich in meiner früheren Arbeit nur graphisch wiedergegeben habe. Diese Messungen sind mit Rücksicht auf die verbesserte Aichung des Thermoelementes p. 55 neu berechnet. Die Gestalt der früher gegebenen Curven ist dadurch nicht erheblich geändert. An diesen Curven (Fig. 9, Taf. I l. c.) kann man sehen, dass die Intensität derjenigen Wellenlängen, bei denen das Maximum der Energie liegt, noch schneller zunimmt, als die für die Gesammtemission, also für höhere Temperaturen mehr dem Weber'schen Gesetz entsprechend. Die Intensität der Wellenlängen 6083, 29 316 und 19 206 A. E. andererseits nimmt langsamer zu und entspricht mehr dem Stefan'schen Gesetz. Ich muss aber ausdrücklich hervorheben, dass die Genauigkeit dieser Messungen geringer war, als bei denjenigen der vorliegenden Arbeit. Ich sehe daher von einer Berechnung dieser Spectralmessungen nach einer der Formeln ab, zumal ich beabsichtige, sie bald mit grösserer Genauigkeit und besserer Spectralanordnung zu wiederholen.

Die Intensität der Wellenlänge λ eines Gitterspectrum als Function der Temperatur. $T_1 = 20$ bis 21^0 C.

$T_2{}^0$ C. $= \lambda$ A. E.	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1450
6 083	—	3	6	10	16	24	43	76	135	182
8 409	1	2,5	4	11	27	61	183	300	566	748
12 730	3	6	17	44	95	189	407	730	1142	1380
14 562	1,5	6	12	27	52	95	148	228	353	444
15 629	4	12	28	61	114	198	311	494	731	923
19 206	3	6	12	27	46	77	121	203	322	—
29 316	1	3	6	11	20	35	55	88	132	161

Nur die Zahlen jeder Horizontalreihe stehen zu einander in den richtigen Grössenverhältnissen.

An die Beziehung zwischen Wärmestrahlung und Temperatur haben sich vielfach Schlussfolgerungen über die Temperatur der Sonne geknüpft. So extrapolirte Rossetti eine Sonnentemperatur von 10 000°, Stefan aus seinem Gesetze eine solche von 5300 bis 5600° C. Diese Zahlen stellen untere Grenzwerthe dar, da die Absorption in der Sonnenatmosphäre nicht berücksichtigt werden kann. Man kann wohl annehmen, dass sich alle festen Körper ähnlich wie Platin verhalten werden. Dann würde unter der Voraussetzung, dass die Strahlung auch über 1450° C. ähnlich zunimmt, wie unter dieser Temperatur, der Schluss zu ziehen sein, dass die Temperatur der Sonne sogar noch unter 5000° C. liegen muss, wenn die Sonne ein fester Körper ist und ein ähnliches Gesetz der Emission befolgt, wie ein solcher.

Hannover, März 1893.

4. *Ueber die Beugung des Lichtes an einem geraden, scharfen Schirmrande; von Eugen Maey.*

(Hierzu Taf. I. Fig. 3—6.)

Den Anlass zu der vorliegenden Arbeit gab eine Beugungserscheinung, die von W. Wien[1]) beschrieben ist, und die, wie er sagt, sich aus der bisherigen Beugungstheorie nicht erklären lässt. Dieselbe besteht darin, dass der Rand scharf geschliffener Metalle von intensivem, weissen Licht getroffen als feine Lichtlinie bis weit in den geometrischen Schatten sichtbar ist.

Bei natürlichem auffallenden Lichte zeigt das gebeugte Licht theilweise Polarisation parallel zum Schirmrande, Phasenverzögerung der zu dem Schirmrande parallelen Componente gegen die senkrechte und verschiedene Färbung der ersteren bei Anwendung verschiedener Metalle. Dieselbe Erscheinung ist von Gouy[2]) mit mannigfaltiger Abänderung der mitwirkenden Bedingungen untersucht worden.

Mehrere Eigenschaften der Erscheinung, insbesondere die verschiedene Färbung bei Anwendung verschiedener Metalle zeigen deutlich einen Einfluss des Materials des benutzten Beugungsschirmes auf die Erscheinung, ein Einfluss, der ausserhalb der Betrachtungen der bisherigen Beugungstheorie liegt.

Im Folgenden soll versucht werden, ob nicht die Erscheinung im wesentlichen, d. h. die Thatsache, dass der von Licht getroffene gerade Rand bis weit in den geometrischen Schatten als Lichtlinie überhaupt sichtbar ist, sich aus der bisherigen Beugungstheorie ergibt. Erst dann wären die Eigenschaften der aus der Theorie sich ergebenden Erscheinung mit den wirklichen zu vergleichen und festzustellen, in welcher Weise das Material des Schirmes dieselbe beeinflusst.

1) W. Wien, Wied. Ann. 28. p. 117. 1886.

2) Gouy, Ann. de chim. et de phys. VI série. 8. p. 145. 1886.

Zu den oben erwähnten Beobachtungen sei bemerkt, dass die genannten Forscher das von einer intensiven Lichtquelle ausgehende Licht durch Linsen auf dem Schirmrande zu einem Bilde der Lichtquelle vereinigten. Die Erscheinung ist aber, wenn auch weniger intensiv, ebenfalls sichtbar, wenn helles, divergentes Licht auf den Schirmrand auffällt. In der folgenden theoretischen Behandlung soll der Einfachheit wegen angenommen werden, dass eine von einem leuchtenden Punkte ausgehende Kugelwelle homogenen Lichtes auf einen geradlinig begrenzten Schirm falle. Dann sind alle Bedingungen erfüllt, um auf das Licht in der Beugungsöffnung die von Kirchhoff gegebene Theorie anwenden zu können.

Theoretischer Theil.

§ 1. Ausgangspunkt der theoretischen Untersuchung.

Kirchhoff[1]) leitet den Werth $\varphi_0(t)$ einer Function φ des Raumes und der Zeit, welche die partielle Differentialgleichung $\partial^2 \varphi / \partial t^2 = a^2 \Delta \varphi$ befriedigt, für einen Punkt 0 und die Zeit t ab aus den Werthen derselben auf einer geschlossenen Fläche, welche einen fest gegebenen Punkt 1 einschliesst. Es ist nach Kirchhoff

$$4 \pi \varphi_0(t) = \int \Omega \, ds,$$

wobei ds das Flächenelement der oben erwähnten Fläche ist, über die das Integral ganz zu erstrecken ist, und Ω eine aus φ abgeleitete Function ist.

Bei der Anwendung dieses Satzes in der Theorie des Lichtes ist Punkt 1 die Lichtquelle, Punkt 0 derjenige, für den man die Lichtbewegung bestimmen will, und φ kann nach Kirchhoff irgend eine der Verrückungscomponenten u, v, w oder auch eine der Wellenfunctionen U, V, W sein, aus denen die Verrückungen sich durch folgenden Differentiationsprocess ergeben[2]):

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}.$$

---

1) Kirchhoff, Zur Theorie der Lichtstrahlen. Sitzungsberichte der Berl. Akademie, 22. Juni 1882. Wied. Ann. **18.** p. 663. 1883.

2) Clebsch: Borchard's Journal **59.** p. 115. 1882.

In jedem Falle müssen φ und die Differentialquotienten $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ in dem Integrationsgebiete endlich und stetig sein. Es sind so im allgemeinen zur Bestimmung des Bewegungszustandes im Punkte 0 zwei Wege vorhanden:

1) Man leitet aus den Verrückungen in der Fläche die des Punktes 0 ab.

2) Man leitet aus den Wellenfunctionen in der Fläche die des Punktes 0 ab und findet dann durch Differentiation die Verrückungen.

Eine Entscheidung, welcher Weg für diesen Fall einzuschlagen ist, muss umsomehr getroffen werden, da beide Wege in der bisherigen Beugungstheorie zu verschiedenen Resultaten führen. Wendet man nämlich auf dem ersten Wege nach bekannten Ueberlegungen das $\int \Omega\, ds$ auf eine beliebig gestaltete Beugungsöffnung an, so müsste die von jedem Flächenelemente herrührende Verrückung im Punkte 0 die Incompressibilitätsbedingung für den Aether

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

befriedigen; dass dieses nicht der Fall ist, lässt sich aber durch längere Rechnung in aller Strenge nachweisen. Hier möge folgende Betrachtung genügen. Lässt man auf eine sehr kleine Beugungsöffnung von einem weit entfernten Punkte 1 linearpolarisirtes Licht auffallen, so existirt in der Oeffnung nur eine Art von Verrückungscomponenten, z. B. u; die Anwendung des obigen Satzes ergibt dann auch für alle Punkte 0 immer nur Verrückungen u_0. Dass aber dann die Bedingung der Incompressibilität $\partial u_0 / \partial x_0 = 0$ nicht erfüllt ist, ist klar, da im geometrischen Schatten die Verrückungen auch in der X-Richtung schnell abnehmen. Bei dem zweiten Wege aber bürgt allein schon die Ableitung der Verrückungen aus den Wellenfunctionen für die Erfüllung der Gleichung

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = 0.$$

Es ist hierzu zu bemerken, dass Kirchhoff bei der Ableitung des obigen Satzes die Bedingung der Incompressibilität des

Aethers nicht benutzt, und dass es demnach fraglich erscheint, ob in der Theorie des Lichtes die Function φ eine der Verrückungen u, v, w bedeuten darf. Indessen kann der Grund dieses Unterschiedes bei Benutzung beider Wege auch im Folgenden gefunden werden.

Die von Kirchhoff gegebene Theorie verlangt, dass die Function φ nebst ihren ersten Differentialquotienten stetige Functionen im Integrationsgebiete sind. Wenn nun das $\int \Omega\, d s$ in der Beugungstheorie über eine berandete Oeffnung erstreckt wird, so schliesst dieses Verfahren die Annahme ein, dass am Rande die Verrückungen unstetig von endlichen Werthen zu Null springen. Es müsste daher jedes auszuwerthende $\int \Omega\, d s$ aus zwei Theilen bestehen: aus dem $\int_0 \Omega\, d s$ über die Beugungsöffnung, soweit in ihr die Verrückungen durch Einführung des Schirmes keine merkliche Störung erleiden — dieses ist auch bisher stets allein ausgewerthet worden — und zweitens aus dem $\int_R \Omega\, d s$ über die dem Rande benachbarten Flächenstücke, in denen ein stetiger, wenn auch sehr schneller Uebergang von Licht zu Dunkelheit stattfindet. Das letzte Integral ist bisher stets vernachlässigt worden, worin zum Theil der Grund zu sehen ist, dass die bei Beugungserscheinungen angestellten Intensitätsmessungen zu Resultaten führten, die mit der Theorie nicht übereinstimmten.[1])

Auch ich sehe mich im Folgenden genöthigt, dieses Integral unberücksichtigt zu lassen, da der stetige Uebergang von Licht zu Dunkelheit am Rande des Schirmes vorläufig noch unbekannt ist. Ich beschränke mich daher darauf zu zeigen, inwieweit das $\int_0 \Omega\, d s$ geeignet ist, die oben besprochene Erscheinung zu beschreiben, und zwar unter Benutzung des zweiten oben angegebenen Weges, da dieser allein zu einer an und für sich möglichen Lichtbewegung führt.

1) Fröhlich, Wied. Ann. 15. p. 591. 1882.

§ 2. **Auswerthung des $\int\limits_0 \Omega\, d s$ für einen im geometrischen Schatten gelegenen Diffractionspunkt.**

Die angenäherte Berechnung des $\int\limits_0 \Omega\, d s$ gelingt durch Anwendung eines Hülfssatzes, der auch von **Kirchhoff** in seiner Theorie der Strahlung und Beugung benutzt ist.

Ist $\Phi(\zeta)$ in dem Intervalle ζ_0 bis ζ' endlich und stetig, so ist

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} k\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \Phi(\zeta)\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta = & -\Big[\Phi(\zeta)\cos(k\zeta+\delta)\Big]_{\zeta_0}^{\zeta'} \\ & + \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\cos(k\zeta+\delta)\,d\zeta. \end{aligned} \right.$$

Wenn $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ nur eine endliche Zahl von Malen vom Abnehmen ins Zunehmen übergeht und eine endliche Zahl von Malen sein Vorzeichen wechselt, so wird

$$\lim_{k=\infty} \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\cos(k\zeta+\delta)\,d\zeta = 0,$$

was sich am einfachsten mit Hülfe des zweiten Mittelwerthsatzes von P. du **Bois-Reymond**[1]) erweisen lässt, sodass man erhält:

$$(2)\quad \lim_{k=\infty} k\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'} \Phi(\zeta)\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta = -\Big[\Phi(\zeta)\cos(k\zeta+\delta)\Big]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

Kirchhoff hat nun das $\int\limits_0 \Omega\, d s$ auf die Gestalt der linken Seite dieser Gleichung gebracht und gezeigt, dass, falls der Diffractionspunkt im geometrischen Schatten liegt, abgesehen von einigen Ausnahmefällen, die auf gewisse Beugungserscheinungen führen, $\Phi(\zeta_0)$ und $\Phi(\zeta')$ Null sind. Er folgerte daraus, dass im allgemeinen im geometrischen Schatten kein Licht vorhanden ist.

Da jedoch in dieser Anwendung der Gleichung (2) die Wellenlänge des Lichtes $\lambda = 2\pi\,/\,k$ gesetzt wurde und λ zwar

1) P. du **Bois-Reymond**, Crelle's Journ. **69.** und **79.**

sehr klein, aber nicht Null ist, ist jene Folgerung nur angenähert richtig, und für Diffractionspunkte im geometrischen Schatten ist daher bei dieser Anwendung des Hülfssatzes die Lichtbewegung allein durch das vernachlässigte Integral

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

bestimmt.

Im Folgenden wird die Gleichung (2) nur auf einen Theil des Intervalles angewendet werden, auf welches Kirchhoff sie angewendet hat, sodass für die neue untere Grenze ζ_0 $\Phi(\zeta)$ nicht wie bei Kirchhoff Null ist. Da die als Resultat sich ergebende Grösse von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$ ist, bleibt zu zeigen, dass die des vernachlässigten Integrals

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

von einer höheren Ordnung klein ist.

Sind $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ und $d^2\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta^2$ endlich und stetig, so ist nach wiederholter partieller Integration

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta &= \frac{1}{k}\left[\frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta}\sin(k\,\zeta+\delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} \\ &+ \frac{1}{k^2}\left[\frac{d^2\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^2}\cos(k\,\zeta+\delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} - \frac{1}{k^2}\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^3\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^3}\cos(k\,\zeta+\delta)\,d\,\zeta. \end{aligned}\right.$$

Wenn $d^3\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta^3$ dieselben Eigenschaften hat, die oben für $d\,\Phi(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ vorausgesetzt wurden, so folgt auch, dass

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^3\,\Phi(\zeta)}{d\,\zeta^3} \cos(k\,\zeta + \delta)\,d\,\zeta$$

für $k = \infty$ Null wird.

Da in den folgenden Anwendungen $\zeta' = \infty$ ist und deshalb der Nachweis dieser Eigenschaften in einigen Fällen für das Intervall ζ_0 bis ∞ wohl schwer zu erbringen ist, so möge bemerkt werden, dass

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{d^3 \Phi(\zeta)}{d\zeta^3} \cos(k\zeta + \delta)\, d\zeta$$

jedenfalls endlich bleibt, falls nur

$$\int_{\zeta_0}^{\infty} \operatorname{abs} \left| \frac{d^3 \Phi(\zeta)}{d\zeta^3} \right| d\zeta$$

endlich ist, eine Bedingung, die in jenen Fällen immer erfüllt ist.

Ist ferner

$$\frac{d\,\Phi(\zeta')}{d\zeta'} = 0 \text{ und } \sin(k\zeta_0 + \delta) = 0,$$

so besteht

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d\,\Phi(\zeta)}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\, d\zeta$$

nur aus Gliedern, die den Factor $1 / k^2 = \lambda^2 / 4\pi^2$ enthalten.

Es soll jetzt im Folgenden als Beugungsöffnung eine unendliche Halbebene, als Beugungsschirm die andere Halbebene gedacht werden. Der Rand des Schirmes sei die Y-Axe eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes, die positive X-Axe liege in der Beugungsöffnung. Die Coordinaten des leuchtenden Punktes seien x_1, y_1, z_1, die des Diffractionspunktes x_0, y_0, z_0; z_0 sei positiv, dann ist z_1 negativ. Es sei ferner

$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2, \quad \varrho_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$r_0^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad \varrho_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

Der Anfangspunkt des Coordinatenkreuzes auf dem Schirmrande wird so gewählt, dass $\varrho_1 + \varrho_0$ das Minimum von $r_1 + r_0$ ist.

Es sei nun

$$\varphi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

bis auf einen constanten Factor eine der Wellenfunctionen U, V, W des auffallenden Lichtes; dann ist nach Vernach-

lässigung eines kleinen Gliedes in bekannter Weise nach Kirchhoff[1])

$$\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \sin 2\pi \left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$(4) \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0 \Omega\, ds = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_0}\right) \sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) dx\, dy.$$

Ich setze nun einmal ähnlich wie Kirchhoff

$$r_1 + r_0 - \varrho_1 - \varrho_0 = \zeta$$

und

$$F(\zeta) = \int\limits_0^{\zeta}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\, ds,$$

wobei die Integration über den Theil der Beugungsöffnung zu erstrecken ist, der zwischen dem Schirmrande und der Curve $r_1 + r_0 + \varrho_1 - \varrho_0 = \zeta$ liegt, dann ist

$$(5) \qquad \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\, d\zeta = \int\limits_{\zeta}^{\zeta + d\zeta}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\, ds.$$

Die Gleichung (4) erhält jetzt folgende Gestalt:

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin 2\pi\left(\frac{\zeta + \varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) d\zeta.$$

Entwickelt man nun ζ in der Beugungsöffnung, für die $z = 0$ ist, nach Potenzen von x und y bis zu den Gliedern zweiten Grades, von denen im vorliegenden Falle keines vernachlässigt werden darf, da x_0 und y_0 bei der hier behandelten Erscheinung nicht wie bei der Fresnel'schen Beugungserscheinung an einem geraden Schirmrande kleine Grössen sind, und setzt den erhaltenen Ausdruck gleich σ, so hat man:

$$\begin{aligned}\sigma &= x(\alpha_1 + \alpha_0) + y(\beta_1 + \beta_0) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{1 - \alpha_1^2}{\varrho_1} + \frac{1 - \alpha_0^2}{\varrho_0}\right) \\ &\quad - xy\left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{\varrho_1} + \frac{\alpha_0 \beta_0}{\varrho_0}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1 - \beta_1^2}{\varrho_1} + \frac{1 - \beta_0^2}{\varrho_0}\right) \\ &= 2 b_{13} x + 2 b_{23} y + b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2\end{aligned}$$

1) Kirchhoff, Wied. Ann. 18. p. 688. 1883.

$$\alpha_1 = -\frac{x_1}{\varrho_1}, \quad \beta_1 = -\frac{y_1}{\varrho_1}, \quad \gamma_1 = -\frac{z_1}{\varrho_1},$$

$$\alpha_0 = -\frac{x_0}{\varrho_0}, \quad \beta_0 = -\frac{y_0}{\varrho_0}, \quad \gamma_0 = -\frac{z_0}{\varrho_0}.$$

Es ist dann $2\,b_{23} = \beta_1 + \beta_0 = 0$, weil $\varrho_1 + \varrho_0$ das Minimum von $r_1 + r_0$ ist.

Ferner setze ich ähnlich wie oben

$$G(\sigma) = \int\limits_0^\sigma \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\,d s$$

(6) $$\frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma} \cdot d\,\sigma = \int\limits_\sigma^{\sigma + d\sigma} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\,d s.$$

Dann ist für kleine Werthe von x und y, für welche obige Entwickelung gilt, also auch für kleine Werthe von ζ und σ

$$F(\zeta) = G(\sigma), \quad \frac{d\,F(\zeta)}{d\,\zeta} = \frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma}.$$

Ist ζ_0 ein solcher Werth, für den die Entwickelung σ_0 ausreicht, dann ist auch

(7) $$\frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^{\zeta_0} \frac{d\,F(\zeta)}{d\,\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta + \vartheta\right)d\,\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int\limits_0^{\sigma_0}\frac{d\,G(\sigma)}{d\,\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma + \vartheta\right)d\,\sigma,$$

worin

$$\vartheta = 2\pi\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

ist. Unterwerfe ich nun noch ζ_0 der Beschränkung, dass

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta_0 + \vartheta\right) = 0$$

ist und nehme an, was später bewiesen werden soll, dass die im Anfange dieses Paragraphen für $\Phi(\zeta)$ und dessen Differentialquotienten verlangten Eigenschaften auch für $d\,F(\zeta)\,/\,d\,\zeta$ und $d\,G(\sigma)\,/\,d\,\sigma$ und deren Differentialquotienten erfüllt sind, dann gelten, entsprechend der Gleichung (2), folgende Gleichungen (8), in denen nur Glieder mit dem Factor λ^2 vernachlässigt sind:

$$(8)\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda}\int_{\zeta_0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta &= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)\right]_{\zeta_0}^{\infty}, \\ \frac{1}{2\lambda}\int_{\sigma_0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma &= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)\right]_{\sigma_0}^{\infty}. \end{aligned}\right.$$

Vergleicht man nun in den Gleichungen (5) und (6) auf beiden Seiten die Grössenordnungen für $\zeta = \infty$, bez. $\sigma = \infty$, so ergibt sich, dass $dF(\zeta)\,/\,d\zeta$ und $dG(\sigma)\,/\,d\sigma$ für unendlich grosse Argumente Null sind. Daraus folgt dann weiter, dass die rechten Seiten der Gleichungen (8) gleich sind, und somit auch die linken:

$$(9)\quad \frac{1}{2\lambda}\int_{\zeta_0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int_{\sigma_0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma.$$

Durch Addition der Gleichungen (7) und (9) erhält man dann:

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\infty}\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta+\vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int_{0}^{\infty}\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma+\vartheta\right)d\sigma.$$

Es ist nun nachträglich noch der Beweis zu erbringen, dass die für die Gleichung (3) nothwendigen Bedingungen in den vorliegenden Anwendungen erfüllt sind, und dass zweitens die vernachlässigten Glieder mit dem Factor λ^2 sonst keine Factoren enthalten, die deren Vernachlässigung unstatthaft machen würden.

Es soll zuerst bewiesen werden, dass $dF(\zeta)\,/\,d\zeta$ und die höheren Differentialquotienten für das Intervall ζ_0 bis ∞ endlich sind.

Dazu führe ich in der X-Y-Ebene statt der Variabelen x, y die neuen ζ, y ein. Die infolge der Transformation auftretende Functionaldeterminante ist in diesem Falle $\Delta = \partial x / \partial \zeta$; es wird dann

$$\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{d\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} d\zeta \int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_0}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta}\,dy.$$

Hierin sind y_1 und y_2, die beiden Werthe von y auf dem

Schirmrande $x = 0$ für ein bestimmtes ζ, als Functionen der Integrationsvariablen ζ zu denken. Setzt man noch

$$\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \cdot \Delta = \varphi(\zeta, y),$$

so wird

$$\frac{dF(\zeta)}{d\zeta} = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(\zeta, y)\, dy,$$

$$\frac{d^2 F(\zeta)}{d\zeta^2} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y)\, dy + \varphi(\zeta, y_2) \frac{d y_2}{d\zeta} - \varphi(\zeta, y_1) \frac{d y_1}{d\zeta},$$

$$\frac{d^3 F(\zeta)}{d\zeta^3} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \varphi(\zeta, y)\, dy + 2\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y_2) \frac{d y_2}{d\zeta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, y_1) \frac{d y_1}{d\zeta}\right]$$
$$+ \varphi(\zeta, y_2) \frac{d^2 y_2}{d\zeta^2} - \varphi(\zeta, y_1) \frac{d^2 y_1}{d\zeta^2}.$$

Die Function $\varphi(\zeta, y)$, sowie alle ihre partiellen Differentialquotienten nach ζ sind in der Beugungsöffnung überall endlich, denn es ist:

$$\varphi(\zeta, y) = \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_0}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\partial x}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{1}{\frac{x - x_1}{r_1} + \frac{x - x_0}{r_0}},$$

und letzterer Ausdruck ist endlich, falls $x_1 \leqq 0$ und $x_0 < 0$ ist, was stets so eingerichtet werden kann. Die Differentialquotienten von $\varphi(\zeta, y)$ sind endlich, weil bei den partiellen Differentiationen nach x keine neuen Nenner auftreten.

Es bleibt jetzt nur noch die Endlichkeit der Differentialquotienten von y_1 und y_2 zu erweisen. Letztere werden als Functionen von ζ bestimmt, wenn man in der Gleichung $r_1 + r_0 = \zeta + \varrho_1 + \varrho_0 = c$, $x = 0$ setzt. Bringt man diese Gleichung auf eine rationale Form in x und y, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$(10) \begin{cases} (r_0^2 - r_1^2)^2 - 2c^2(r_0^2 + r_1^2) + c^4 = \\ a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0, \end{cases}$$

wobei bedeutet:

$$
\begin{array}{l|l}
a_{11} = 4[(x_0 - x_1)^2 - c^2] & a_{13} = -2[(x_0 - x_1)(\varrho_0^2 - \varrho_1^2) - (x_0 + x_1)c^2] \\
a_{22} = 4[(y_0 - y_1)^2 - c^2] & a_{23} = -2[(y_0 - y_1)(\varrho_0^2 - \varrho_1^2) - (y_0 + y_1)c^2] \\
a_{12} = 4(x_0 - x_1)(y_0 - y_1) & a_{33} = (\varrho_0^2 - \varrho_1^2)^2 - 2c^2(\varrho_0^2 + \varrho_1^2) + c^4.
\end{array}
$$

Setzt man in obige Gleichung (10) $x = 0$, so wird

$$
y_1 = -\frac{a_{23} - \sqrt{a^2_{23} - a_{22}\, a_{33}}}{a_{22}}, \quad y_2 = -\frac{a_{23} + \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}\, a_{33}}}{a_{22}}
$$

Da die Grössen a_{ik} ganze Functionen von c, also auch von ζ sind, so treten auch bei wiederholten Differentiationen von y_1 und y_2 nach ζ nur a_{22} und $\sqrt{a_{23}^2 - a_{22}\, a_{33}}$ als Nenner auf. a_{22} kann nie Null werden, sondern ist stets negativ. Nur $a_{23}^2 - a_{22}\, a_{33}$ kann verschwinden. Letzteres tritt aber, wie aus der Geometrie der Kegelschnitte bekannt ist, nur für die Ellipse der durch die Gleichung (10) definirten Schaar ein, welche die Linie $x = 0$ berührt, also für $\varrho_1 + \varrho_0 = c$ oder $\zeta = 0$. Diese Stelle ist aber bei obiger Anwendung der Gleichung (2) ausgeschlossen worden, was bei Kirchhoff nicht geschehen ist.

Analog dem oben geführten Beweise lässt sich auch für $dG\,/\,d\sigma$ und seine Differentialquotienten in dem Intervalle σ_0 bis ∞ die Endlichkeit nachweisen. Zu dem Zwecke führe ich für die Variablen x, y die neuen Variablen σ und y' ein durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\sigma &= b_{11}\, x^2 + 2\, b_{12}\, x y + b_{22}\, y^2 + 2\, b_{13}\, x \\
y' &= b_{12}\, x + b_{22}\, y.
\end{aligned}
$$

Es ist dann

$$
\varphi(\sigma, y') = \left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1\, r_0} \cdot \varDelta,
$$

$$
\varDelta = \frac{\partial x}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial x}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial y'}{\partial y} - \dfrac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y'}{\partial x}} = \frac{1}{2\,[B_{33}\, x + b_{13}\, b_{22}]}.
$$

$\varDelta$ wird in der Beugungsöffnung nirgends unendlich, da x, $B_{33} = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2$, b_{13} und b_{22} stets positiv sind. Die Differentialquotienten von $\varphi(\sigma, y')$ nach σ werden auch nirgends unendlich, da bei den partiellen Differentationen nach x und y keine neuen Nenner auftreten, und ferner

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{y'=\mathrm{const.}}} = \frac{b_{22}}{2(x B_{33} + b_{13} b_{22})}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{1}{\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)_{y'=\mathrm{const.}}} = \frac{-b_{12}}{2(x B_{33} + b_{13} b_{22})}$$

auch nicht unendlich werden.

Dagegen werden die Differentialquotienten von

$$y_1' = -\sqrt{b_{22}\sigma}, \quad y_2' = +\sqrt{b_{22}\sigma}$$

zwar unendlich, aber nur für $\sigma = 0$, welche Stelle ebenfalls bei der Anwendung der Gleichung (2) ausgeschlossen ist.

Dass $d^2 F(\zeta) / d\zeta^2$ und $d^2 G(\sigma) / d\sigma^2$ für unendlich grosse Argumente Null sind, ergibt sich aus der oben gegebenen Darstellung derselben, da in ihr r_1 und r_0 im dritten Grade im Nenner auftreten, und dieselben für $\zeta = \infty$ und $\sigma = \infty$ auch unendlich sind.

Es bleibt nur noch übrig die Grösse der vernachlässigten Glieder abzuschätzen im Verhältniss zu der als Resultat sich ergebenden Grösse. Letztere enthält, wie sich später zeigen wird, den Factor $\sqrt{\lambda}$. Die beiden grössten in den Gleichungen (8) unterdrückten Glieder waren

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{d^3 F(\zeta_0)}{d\zeta^3}$$

und

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\frac{d^3 G(\sigma_0)}{d\sigma^3}.$$

Diese Grössen setzen sich, wie bei der Untersuchung von $d^3 F(\zeta) / d\zeta^3$ und $d^3 G(\sigma) / d\sigma^3$ gezeigt wurde, aus einer Summe von Gliedern zusammen, von denen ein Theil für jedes ζ, bez. σ endlich ist. Diese können jetzt wegen des Factors λ^2 ohne Weiteres vernachlässigt werden. Andere dagegen wurden für $\zeta = 0$, bez. $\sigma = 0$ wie $1 / \sqrt{\zeta^3}$, bez. $1 / \sqrt{\sigma^3}$ unendlich. Nun sind zwar ζ_0 und σ_0 klein, können aber noch gross gegen λ, z. B. gleich $N.\lambda$ gewählt werden, wobei N ungefähr $= 1 / \sqrt{\lambda}$ ist. Dann enthalten die vernachlässigten Grössen ausser dem Factor $\sqrt{\lambda}$ noch den Factor $1 / \sqrt{N^3}$. Ausserdem tritt bei $d^3 F(\zeta) / d\zeta^3$ in diesen Gliedern infolge von Differentiationen die

Grösse $c = r_1 + r_0$ im Nenner in einem höheren Grade auf als in den übrigen Gliedern, während in den entsprechenden Gliedern von $d^3 G(\sigma) / d\sigma^3$ die kleine Grösse

$$\sqrt{b_{22}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta_1^2}{\varrho_1} + \frac{1-\beta_0^2}{\varrho_0}\right)}$$

als Factor hinzutritt.

Also wird unter Vernachlässigung nur kleiner Grössen:

$$\frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{dF(\zeta)}{d\zeta}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\zeta + \vartheta\right)d\zeta = \frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty \frac{dG(\sigma)}{d\sigma}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma + \vartheta\right)d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sigma + \vartheta\right)dx\,dy.$$

Setzt man jetzt:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{B_{33}}{b_{22}}}\cdot x + \xi_1, \\ \xi_1 &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\sqrt{\frac{b_{22}}{B_{33}}}\cdot b_{13}, \\ \eta &= \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\cdot\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{b_{22}}}\cdot x + \sqrt{b_{22}}\cdot y\right), \end{aligned}\right.$$

wobei die Wurzeln im Folgenden als positiv gedacht werden, so wird

$$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\sigma = \xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2,$$

$$dx\,.\,dy = \frac{\lambda\,.\,d\xi\,d\eta}{2\pi\sqrt{B_{33}}},$$

$$4B_{33} = \frac{\gamma_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma_0^2}{\varrho_0^2} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_0^2}{\varrho_1\varrho_0} + \frac{(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0)^2}{\varrho_1\varrho_0}.$$

Das Integral, welches $\varphi_0(t)$ angibt, kann nun als folgende Summe dargestellt werden:

$$\frac{\sin\vartheta}{4\pi\sqrt{B_{33}}}\cdot\int_{\xi_1}^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\cos(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)\,d\xi\,d\eta$$

$$+ \frac{\cos\vartheta}{4\pi\sqrt{B_{33}}}\cdot\int_{\xi_1}^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\sin(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)\,d\xi\,d\eta.$$

Da sich $\cos(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)$ und $\sin(\xi^2 + \eta^2 - \xi_1^2)$ wiederum zerlegen lassen, so bleiben zuerst folgende Quadraturen auszuführen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\sin}{\cos} (\eta^2)\, d\eta.$$

Ist η_0 ein solcher Werth, dass für das Intervall 0 bis η_0 $(z_0 / r_0 - z_1 / r_1) 1 / r_1 r_0$ als constant zu betrachten ist, so ist:

$$(12) \quad \int_0^{\eta_0} \left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \frac{\sin}{\cos} (\eta^2)\, d\eta = \left[\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0} \int_0^{\eta_0} \frac{\sin}{\cos} (\eta^2)\, d\eta.$$

η^2 ist nun eine Function von x und y, in deren Coefficienten der Factor $1 / \lambda$ auftritt (vgl. Gleichung (11)); es wird daher gesetzt $\eta^2 = v / \lambda$, $\eta_0^2 = v_0 / \lambda$. Dagegen ist

$$\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{v}} = \chi(v, \xi)$$

eine Function von x und y, die nicht von λ abhängt. Da $\chi(v, \xi)$ und $d\chi(v, \xi) / dv$ für $v = \infty$ Null sind, so ist, falls v_0 der Beschränkung unterworfen wird, dass $\sin(v_0 / \lambda + \delta) = 0$ ist, entsprechend der Gleichung (2) dieses Paragraphen:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{v_0}^{\infty} \chi(v, \xi) \sin\left(\frac{v}{\lambda} + \delta\right) dv = \chi(v_0, \xi) \cos\left(\frac{v_0}{\lambda} + \delta\right).$$

Da nun der Voraussetzung nach für das Intervall 0 bis η_0 $(z_0 / r_0 - z_1 / r_1) 1 / r_1 r_0$ als constant zu betrachten ist, so ist

$$\chi(v_0, \xi) = \left[\left(\frac{z_0}{r_0} - \frac{z_1}{r_1}\right) \frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0} \cdot \frac{1}{\sqrt{v_0}}.$$

Der Gleichung (2) entsprechend ist ferner

$$\frac{1}{\lambda} \int_{v_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \sin\left(\frac{v}{\lambda} + \delta\right) dv = \frac{1}{\sqrt{v_0}} \cos\left(\frac{v_0}{\lambda} + \delta\right).$$

Man hat demnach:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\limits_{v_0}^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_0}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{v}}\sin\left(\frac{r_0}{\lambda}+\delta\right)dv\\ &=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int\limits_{v_0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{v}}\sin\left(\frac{v}{\lambda}+\delta\right)dv.\end{aligned}\right.$$

Da

$$\frac{d\frac{1}{\sqrt{v}}}{dv},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{4\pi\sqrt{b_{22}v}},\quad \frac{\partial\chi}{\partial v}=\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{d\frac{1}{\sqrt{v}}}{dv}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{v}}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]\frac{\partial y}{\partial v}$$

und ebenso die höheren Differentialquotienten nur für $v=0$ unendlich werden, so sind auch in der Gleichung (13) nur Glieder mit dem Factor λ^2 unterdrückt. Zwar ist v_0, welches in dem Nenner dieser Glieder auftritt, klein, es kann jedoch gegen λ noch gross gewählt werden.

Multiplicirt man die Gleichung (13) mit $1/2\sqrt{\lambda}$, führt wieder η statt v ein und setzt das eine Mal $\delta=0$, das andere Mal $\delta=\pi/2$, so erhält man

$$(14)\quad \int\limits_{\eta_0}^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\cdot\int\limits_{\eta_0}^{\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta$$

und durch Addition der Gleichungen (12) und (14)

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta.$$

Das Entsprechende gilt für das $\int\limits_{-\infty}^{0}$, sodass man erhält:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta=\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_1 r_0}\right]_{\eta=0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin}{\cos}(\eta^2)\,d\eta$$
$$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\left(\frac{x_0}{r_0}-\frac{x_1}{r_1}\right)\frac{1}{r_0 r_1}\right]_{\eta=0}$$

Es ergibt sich also:

$$4 . \sqrt{2\pi B_{33}} \cdot \varphi_0(t) = (\sin\vartheta + \cos\vartheta) \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta=0} \cos(\xi^2 - \xi_1^{\,2})\, d\xi$$

$$- (\sin\vartheta - \cos\vartheta) \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{x_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta=0} \sin(\xi^2 - \xi_1^{\,2})\, d\xi .$$

Durch die entsprechende Ueberlegung, wie bei den Integralen mit der Variablen η, lässt sich zeigen, dass auch bei diesen der Factor

$$\left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{\eta=0,\ \xi=\xi_1} = \left[\left(\frac{x_0}{r_0} - \frac{x_1}{r_1} \right) \cdot \frac{1}{r_1 r_0} \right]_{x=0,\ y=0} = \left(\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1} \right) \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1}$$

vor das Integral gezogen werden kann.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\int\limits_{\xi_1}^{\infty} \cos(\xi^2 - \xi_1^{\,2})\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} K, \qquad \int\limits_{\xi_1}^{\infty} \sin(\xi^2 - \xi_1^{\,2})\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} S,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(S - K) = f \sin\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(S + K) = f \cos\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda},$$

$$(15) \qquad \operatorname{tg}\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = \frac{S - K}{S + K}, \quad f^2 = K^2 + S^2,$$

so erhält man

$$\varphi_0(t) = \frac{f}{4\sqrt{2\pi B_{33}}} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_0} \left(\frac{x_0}{\varrho_0} - \frac{x_1}{\varrho_1} \right) \cos 2\pi \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0 + \varepsilon}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

als Werth der Wellenfunction im Diffractionspunkt.

Für die oben eingeführten Integrale K und S sind von Cauchy folgende semiconvergenten Reihenentwickelungen aufgestellt, in denen hier $u_1 = \xi_1 \sqrt{2}$ ist:

$$K = \frac{1}{u_1^{\,3}} - \frac{1.3.5}{u_1^{\,7}} + \frac{1.3.5.7.9}{u_1^{\,11}} \ldots$$

$$S = \frac{1}{u_1} - \frac{1.3}{u_1^{\,5}} + \frac{1.3.5.7}{u_1^{\,9}} \ldots$$

Da ξ_1 als Factor $1 / \sqrt{\lambda}$ enthält, so sind diese Reihen sehr brauchbar selbst in dem Falle, dass der Diffractionspunkt nur

in geringer Entfernung von der Grenze des geometrischen Schattens liegt. Erst dann, wenn der Diffractionspunkt dieser Grenze sehr nahe liegt, ist ξ_1 klein, und dann ist es nöthig, folgende Darstellung von f und ε zu benutzen. Setzt man

$$\int_0^{\xi_1} \cos(\xi_1^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{K}$$

und

$$\int_0^{\xi_1} \sin(\xi_1^2 - \xi^2)\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\Sigma,$$

so ist

$$K = \sqrt{2}\int_0^{\infty} \cos(\xi^2 - \xi_1^2)\, d\xi - \mathrm{K}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\cos\xi_1^2 + \sin\xi_1^2) - \mathrm{K},$$

$$S = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\cos\xi_1^2 - \sin\xi_1^2) + \Sigma,$$

$$f \sin\frac{\pi\varepsilon}{\lambda} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\xi_1^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{K} + \Sigma)$$

$$f \cos\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\xi_1^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{K} - \Sigma)$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\varepsilon}{\lambda} = \frac{\Sigma + \mathrm{K} - \sqrt{\pi}\,\sin\xi_1^2}{\Sigma - \mathrm{K} + \sqrt{\pi}\,\cos\xi_1^2} \tag{16}$$

$$f^2 = \frac{\pi}{2} + \mathrm{K}^2 + \Sigma^2 - \sqrt{\pi}\left[\sin\xi_1^2(\mathrm{K} + \Sigma) + \cos\xi_1^2(\mathrm{K} - \Sigma)\right].$$

Für die Integrale K und Σ gibt es folgende Reihen, die zwar für alle Werthe des Argumentes convergiren, aber nur bei kleinen Werthen desselben praktisch sind:

$$\mathrm{K} = u_1 - \frac{u_1^5}{1.3.5} + \frac{u_1^9}{1.3.5.7.9} \cdots$$

$$\Sigma = \frac{u_1^3}{1.3} - \frac{u_1^7}{1.3.5.7} + \frac{u_1^{11}}{1.3.5.7.9.11} \cdots$$

§ 3. **Bestimmung der Fortpflanzung des gebeugten Lichtes.**

Setzt man zur Abkürzung

$$\varphi_0(t) = F\cos 2\pi\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_0 + \varepsilon}{\lambda} - \frac{t}{T}\right),$$

$$F = f\,\frac{1}{4\sqrt{2\pi B_{33}}}\,\frac{1}{\varrho_1\varrho_0}\left(\frac{z_0}{\varrho_0} - \frac{z_1}{\varrho_1}\right),$$

so sind für linearpolarisirtes Licht die Wellenfunctionen

$$U_0 = A\varphi_0(t), \quad V_0 = B\varphi_0(t), \quad W_0 = C\varphi_0(t),$$

wobei A, B und C Constante bedeuten, und die Verrückungen

$$u_0 = \frac{\partial V_0}{\partial z_0} - \frac{\partial W_0}{\partial y_0}, \quad v_0 = \frac{\partial W_0}{\partial x_0} - \frac{\partial U_0}{\partial z_0}, \quad w_0 = \frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{\partial V_0}{\partial x_0}.$$

Bei diesen Differentiationen ist indessen ein Coordinatensystem mit festem Anfangspunkt vorausgesetzt, während $\varphi_0(t)$ durch Coordinaten dargestellt ist, deren Anfangspunkt auf dem Schirmrande mit dem Diffractionspunkt variirt. Man denke sich daher $\varphi_0(t)$ vorübergehend transformirt in Coordinaten x', y', z', die parallel zu den früheren sind, und deren Anfangsfangspunkt fest im Punkt 1 liegt.

Bei der Differentiation nach x_0', y_0', z_0' kann man sich darauf beschränken,

$$\cos 2\pi\left(\frac{\varrho_0 + \varrho_1 + \varepsilon}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = \cos\vartheta_1$$

zu differentiren, da hierbei der Factor $1/\lambda$ auftritt, sodass alle Glieder, die durch Differentiren von F hinzutreten würden, dagegen verschwinden. Ferner ist ε, wie sich aus den Gleichungen (15) und (16) ergibt, von der Ordnung λ, sodass die bei der Differentiation von ε auftretenden Glieder auch vernachlässigt werden können. Man hat daher:

$$u_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(B\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial z_0'} - C\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial y_0'}\right),$$

$$v_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(C\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial x_0'} - A\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial z_0'}\right),$$

$$w_0 = F\frac{\partial\cos\vartheta_1}{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}\left(A\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial y_0'} - B\,\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial x_0'}\right).$$

Es seien nun x_2', y_2', z_2' die neuen Coordinaten des früheren Anfangspunktes, dann sind

$$\varrho_1 = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2},$$
$$\varrho_0 = \sqrt{(x_0' - x_2')^2 + (y_0' - y_2')^2 + (z_0' - z_2')^2};$$

hierbei sind x_2' und z_2' fest, während y_2' von x_0', y_0', z_0' durch die Gleichung $\beta_0 + \beta_1 = 0$ oder

$$\frac{y_2'}{\varrho_1} = \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0}$$

abhängt. Nun ist aber

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial x_0'} + \frac{x_0' - x_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0}\cdot\frac{\partial y_2'}{\partial x_0'} = \frac{x_0}{\varrho_0},$$
$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial y_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial y_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial y_0'} + \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0}\cdot\frac{\partial y_2'}{\partial y_0'} = \frac{y_0}{\varrho_0},$$
$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial z_0'} + \frac{\partial \varrho_0}{\partial z_0'} = \frac{y_2'}{\varrho_1}\frac{\partial y_2'}{\partial z_0'} + \frac{z_0' - z_2'}{\varrho_0} - \frac{y_0' - y_2'}{\varrho_0}\cdot\frac{\partial y_2'}{\partial z_0'} = \frac{z_0}{\varrho_0}.$$

Man erhält also:

$$u_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(B\frac{z_0}{\varrho_0} - C\frac{y_0}{\varrho_0}\right) = F\left(C\frac{y_0}{\varrho_0} - B\frac{z_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1,$$
$$v_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(C\frac{x_0}{\varrho_0} - A\frac{z_0}{\varrho_0}\right) = F\left(A\frac{z_0}{\varrho_0} - C\frac{x_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1,$$
$$w_0 = F\frac{\partial \cos\vartheta_1}{\partial \varrho_0}\left(A\frac{y_0}{\varrho_0} - B\frac{x_0}{\varrho_0}\right) = F\left(B\frac{x_0}{\varrho_0} - A\frac{y_0}{\varrho_0}\right)\frac{2\pi}{\lambda}\sin\vartheta_1.$$

Ausser diesem Lösungssystem gibt es noch ein zweites für die Verrückungen [1]), u_0', v_0', w_0', wenn man setzt

$$u_0' = \frac{\partial v_0}{\partial z_0} - \frac{\partial w_0}{\partial y_0}, \quad v_0' = \frac{\partial w_0}{\partial x_0} - \frac{\partial u_0}{\partial z_0}, \quad w_0' = \frac{\partial u_0}{\partial y_0} - \frac{\partial v_0}{\partial x_0}.$$

Ein drittes, allgemeines Lösungssystem erhält man durch lineare Combination der beiden ersten. [2]) Die Frage, welche dieser Lösungen thatsächlich hier gilt, ist zwar für die Intensitätsbestimmung von Bedeutung, aber für die auftretenden Wellenflächen gleichgültig; über diese lässt sich allgemein Folgendes aussagen.

Wird der Einfachheit wegen $x_1 = 0$ gesetzt, was immer ohne Einschränkung des Problems statthaft ist, so ergibt sich aus der zweiten Darstellung von $\operatorname{tg}(2\pi\varepsilon/\lambda)$ (§ 2, Gleichung (16)), dass für $\xi_1 = 0$ oder $\alpha_0 = 0$ auch $\varepsilon = 0$ ist und für kleine Werthe von ξ_1 ε positiv wird. Da ferner ξ_1 wegen des Fac-

1) Rethy, Wied. Ann. **11.** p. 508. 1880.
2) J. Fröhlich, Wied. Ann. **22.** p. 161. 1884.

tors $\sqrt{1/\lambda}$ selbst für mässig kleine Werthe α_0 sehr gross ist, erkennt man aus der ersten Darstellung (§ 2, Gleichung (15)), dass abgesehen von sehr kleinen α_0 mit grosser Annäherung ε constant den Werth $\lambda/8$ hat. Hieraus folgt nun, dass die Verrückungen im geometrischen Schatten Wellen bilden, deren Flächen gleicher Phase sich mit sehr grosser Annäherung durch folgende Construction darstellen lassen.

Man ziehe in der Ebene $x = 0$, welche durch die Lichtquelle und den Schirmrand geht, Kreise um die Lichtquelle, den Punkt 1, als Mittelpunkt und drehe die von dem Schirmrande, der Linie $x = 0$, $z = 0$, abgeschnittenen Kreisbogen um letztere als Axe in den geometrischen Schatten hinein, so erzeugen diese obige Flächen nur mit der Beschränkung, dass die Wellen auf fast der ganzen Fläche gegen den Rand $x_0 = 0$ eine Phasenverzögerung von $\lambda/8$ haben. Diese Wellenflächen kann man als Enveloppen der in den geometrischen Schatten sich fortpflanzenden Kugelwellen auffassen, deren Vorhandensein schon Huygens in seiner Abhandlung „Traité de la lumière“ als Consequenz seiner Theorie anerkannte. Der Grund ihrer geringen Intensität ist der, dass die gebeugte Wellenfläche Enveloppe nur einfach unendlich vieler Kugelflächen ist, während die ungebeugten Wellenflächen stets Enveloppen zweifach unendlich vieler Kugelwellen sind.

Da die Normale dieser Flächen durch den Coordinatenanfangspunkt auf dem Schirmrande geht, und ϱ_0 der eine Hauptkrümmungsradius ist, so folgt, dass diese Wellen bei Accomodation des Auges auf den Coordinatenanfangspunkt denselben als leuchtend erscheinen lassen. Der andere Hauptkrümmungsradius ist nun stets grösser als der erste, nämlich $\varrho_1 + \varrho_0$, und es folgt daraus, dass bei einer Anpassung des Auges auf die erste Krümmung das Licht der Welle als Bild auf der Netzhaut nicht zu einem Punkte, sondern auf einer geraden Linie vereinigt wird, deren Mitte durch die Richtung der Normale der Wellenfläche ϱ_0 bestimmt wird. Da ϱ_0 so definirt war, dass $\varrho_1 + \varrho_0$ ein Minimum ist, so gilt auch hier der Satz, dass der Weg des Lichtes ein Minimum ist.

Aus der oben abgeleiteten Erscheinung, die Gouy die innere Beugung nennt, ergibt sich nun leicht eine damit stets verbundene, die auch von genanntem Forscher experimentell

Untersucht ist und äussere Beugung genannt worden ist. Es liege jetzt der Diffractionspunkt ausserhalb des Schattens; x_0 sei also positiv. Dann muss man, da jetzt für das Integral

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y$$

die obigen Betrachtungen ungiltig werden, setzen:

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y - \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega\, d x\, d y.$$

Das erste Integral der rechten Seite der Gleichung stellt nun eine Lichtbewegung dar, welche ohne das Vorhandensein des Schirmes stattfinden würde. Das zweite Integral dagegen wird, wenn man x für $-x$ schreibt, genau das oben ausgewerthete Integral. Es lässt sich also die Lichtbewegung ausserhalb des geometrischen Schattens auffassen als eine Superposition zweier Wellenbewegungen, von denen die eine der ungestört sich fortpflanzenden Welle gleich ist, die andere zu der bei der inneren Beugung auftretenden Welle symmetrisch ist, aber mit entgegengesetzter Phase. Letztere Welle gibt die als äussere Beugung bezeichnete Erscheinung. Es mag bemerkt werden, dass der Weg des nach aussen gebeugten Lichtes ein Minimum ist nur in Bezug auf alle Wege, die über den Schirmrand führen.

Man erkennt, wie diese Erscheinung die Vorstellung von Thomas Young von dem leuchtenden Schirmrande bestätigt und wie für die die äussere Beugung gebenden Wellenflächen der Gangunterschied $\lambda / 2$ gegen die Welle der inneren Beugung zu Stande kommt. Die auf Grund der Theorie von Young angestellten Berechnungen der Lage der Interferenzen mit dem ungebeugten Licht ergaben keine genaue Uebereinstimmung mit der Erfahrung, weil es damals noch nicht bekannt war, dass von der Grenze des geometrischen Schattens an für die Beugungswellenflächen eine Phasenverzögerung bis zu $\lambda / 8$ eintritt.

Prüfung der Theorie durch die Beobachtung.

Obgleich von Gouy und Wien nach mannigfachen Richtungen hin Beobachtungen ausgeführt worden sind, die auch

im Folgenden Verwendung finden sollen, so sind doch durch sie zwei Fragen noch nicht beantwortet worden, die bei der Prüfung obiger Theorie als die wichtigsten anzusehen sind: erstens, welches die Wellenflächen sind, in denen sich das beobachtete gebeugte Licht fortpflanzt, und zweitens, in welcher Weise die Intensität des gebeugten Lichtes von der Grenze des geometrischen Schattens an abnimmt.

Bei den im Folgenden beschriebenen Beobachtungen diente als Beugungsschirm eine scharfe Stahlschneide, weil durch eine solche die Voraussetzung der Theorie, die Benutzung eines genau geradlinig begrenzten Schirmes, am besten angenähert erreicht wird.

§ 4. Prüfung der Wellenflächen des gebeugten Lichtes.

Die Theorie verlangt, wie oben gezeigt ist, dass nur diejenige Stelle des Schirmrandes hell erscheint, für welche die auffallenden und gebeugten Strahlen mit der Richtung des Schirmrandes Supplementwinkel bilden, so dass also für eine bestimmte Einfallsrichtung das gebeugte Licht sich auf einen Kegelmantel vertheilt, der im folgenden als Beugungsfläche bezeichnet werden soll. Diese Thatsache konnte leicht bestätigt werden. Zwar beobachtet man, dass auch ausserhalb der Beugungsfläche die Schneide noch leuchtet, doch ist dieses Licht besonders bei mässigen Beugungswinkeln äusserst gering gegen das in derselben beobachtete. Ausserdem zeigt sich die auffallende Thatsache, dass die Stellen der Schneide, welche innerhalb der Beugungsfläche besonders hell erscheinen, ausserhalb dieser das wenigste Licht zeigen. Es liegt die Vermuthung nahe, dass diese Stellen die Voraussetzung der Theorie, dass sie gerade und scharf sind, in höherem Maasse erfüllen als die anderen. Eine Prüfung unter dem Mikroskop bestätigte dieses, so dass als Grund des Leuchtens der Schneide auch ausserhalb der Beugungsfläche das nach allen möglichen Richtungen reflectirte Licht der Gratstückchen und der an diesen unvermeidlich hängenden Staubtheilchen anzusehen ist.

Die Thatsache, dass fast die ganzen Wellenflächen gegen die Stellen an der Grenze des geometrischen Schattens eine Verzögerung um $\lambda/8$ haben, entzieht sich bei der inneren Beugung vollkommen der Prüfung. Nur bei der äusseren

Beugung ist eine solche möglich durch Beobachtung der Interferenz des gebeugten und des nicht gebeugten Lichtes. Da jedoch für das Grenzgebiet, in dem allein jene Interferenzen beobachtet werden können, obige Theorie mit der für die Fresnel'sche Beugungserscheinung an einem geraden Schirmrande gegebenen zusammenfällt, und diese genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung aufweist, so ist hier eine solche Prüfung überflüssig.

An dieser Stelle ist eine Beobachtung zu erwähnen, die sowohl von Gouy wie von Wien gemacht ist. Die Verticalcomponente des gebeugten Lichtes zeigte bei grossen Beugungswinkeln eine Phasenverzögerung gegen die Horizontalcomponente. Wien beobachtete diese Erscheinung nur bei den benutzten Stahlschneiden nicht, und Gouy beobachtete auch bei Stahl eine Phasenverschiebung bis zu $\lambda / 4$ bei Anwendung abgerundeter Schirme. Es scheint demnach nicht sowohl das Material des Schirmes, als vielmehr dessen Gestalt für diese Erscheinung maassgebend zu sein, und wenn bei allen Metallen ausser Stahl die Phasenverschiebung stets merklich war, so dürfte dieses seinen Grund darin haben, dass erstere nie so fein wie Stahl geschliffen werden können.

Mit obiger Theorie dürfte diese Erscheinung in folgender Weise in Einklang zu bringen sein. Es ist sicher, dass die den Bedingungen der Theorie entsprechend zu wählende Integrationsgrenze nicht genau mit dem Schirmrande zusammenfällt, da in der unmittelbaren Nachbarschaft des Randes Beeinflussungen der Lichtbewegung stattfinden, während das Integral nur soweit über die Beugungsöffnung auszudehnen ist, als die Lichtbewegung in derselben trotz Einführung des Schirmes keine merkliche Störung erleidet. Wenn nun für beide Componenten diese Beeinflussung in verschiedener Weise stattfindet, so sind demnach für beide andere Grenzen zu wählen, woraus sich dann für grosse Beugungswinkel eine Phasendifferenz ergiebt. Dieselbe ist indessen bei einer einmaligen Beugung an einem scharfen Schirme unmerklich, wie die Beobachtungen an Stahl zeigen. Es ist aber begreiflich, dass bei stumpfen oder abgerundeten Schirmen, an denen das Licht erst nach mehrmaliger Beugung um grosse Winkel abgelenkt wird, eine Phasendifferenz merklich wird.

§ 5. **Beobachtung der Abnahme des gebeugten Lichtes bei wachsendem Beugungswinkel.**

Der allgemeine Ausdruck für die Amplitude des gebeugten Lichtes in der ersten Darstellung (§ 2, Gleichung 15) zeigt, wie bei der Berechnung der Amplitude noch näher ausgeführt werden wird, dass, wenn im auffallenden, weissen Lichte $f(\lambda)$ die Intensität des Lichtes mit der Wellenlänge λ ist, ausgenommen sehr kleine Beugungswinkel die Intensität des gebeugten Lichtes mit der Wellenlänge λ proportional $\lambda . f(\lambda)$ ist. Daraus geht hervor, dass das gebeugte Licht eine schwache röthlichgelbe Färbung zeigen muss, und zwar dieselbe Färbung für alle grösseren Beugungswinkel, bei denen die erste Darstellung der Amplitude gilt. Das ist, wie die Beobachtungen von Gouy und Wien zeigen, nur bei Benutzung feiner Stahlschneiden als Beugungsschirm der Fall, welche in einem schwach gelblichen, fast weissem Lichte leuchteten. Indessen ergaben auch die Beobachtungen mit Stahl, dass das Licht mit wachsendem Beugungswinkel sich immer röther färbte, wenn man stumpfe oder abgerundete Schirme benutzte.[1]) Da auch die Beobachtungen an Schirmen aus anderen Metallen, welche nie die Schärfe der Stahlschirme erreicht haben dürften, vorzugsweise roth gefärbtes Licht ergaben, dessen Färbung mit wachsendem Beugungswinkel zunahm, so scheint in erster Linie nicht das Material, sondern die Gestalt des Schirmes die stärkere Färbung zu bewirken, indem abgerundete Schirme durch wiederholte Beugung ein immer stärkeres Hervortreten des Lichtes mit grosser Wellenlänge verursachen.

Weil nach Obigem Beobachtungen an fein geschliffenen Stahlschneiden die beste Aussicht bieten, Uebereinstimmung mit der Theorie aufzuweisen, wurden solche bei den im Folgenden beschriebenen Beobachtungen benutzt.[2]) Dieselben wurden mit dem Rande in die Axe eines Spectrometers gestellt. Durch ein rechteckiges, schmales, verstellbares Diaphragma fiel paralleles, linearpolarisirtes Licht senkrecht auf den Rand, so dass bei den folgenden Beobachtungen die

1) Gouy, Ann. de chim. et de phys. VI. série. 8. 1886. p. 159.

2) Für kleine Beugungswinkel bis ungefähr 10° zeigten auch Beobachtungen an einer feinen Silberschneide gute Uebereinstimmung.

Beugungsfläche eine Ebene war. Als Lichtquelle diente eine Zirkonlampe, deren glühender Zirkonkörper bei den verschiedenen Beobachtungen verschiedene Breite hatte. Durch die Anwendung parallelen Lichtes wurde nicht nur der Vortheil einer möglichst einfachen Verwerthung der Theorie erreicht, sondern vor allem ermöglicht, die Beugung schon von 1^0 an zu beobachten, ohne durch das ungebeugte Licht gestört zu werden.

Um beide Componenten einzeln zu untersuchen, lies man zuerst parallel zum Rande polarisirtes Licht auffallen, dann zum Rande senkrecht polarisirtes.

Das im geometrischen Schatten als Lichtlinie sich zeigende gebeugte Licht wurde nun verglichen mit einem seitlich durch eine unveränderliche Lichtquelle beleuchteten Coconfaden, welcher in ungefähr 1 cm Entfernung vor dem Schirmrande parallel angebracht war, sodass bei einer Entfernung des Auges um 31 cm Schirmrand und Faden ohne Aenderung der Accomodation gleichzeitig deutlich sichtbar waren. Der Faden und sein Beleuchtungsapparat, ein Amylacetatlämpchen, waren mit dem Beobachtungsrohr gleichzeitig drehbar. Im letzteren befand sich ausser einigen Diaphragmen nur ein Nicol, welcher so lange gedreht wurde, bis das linearpolarisirte gebeugte Licht gleich dem von dem Faden herkommenden Lichte war. Der Faden und seine Beleuchtung mussten so gewählt werden, dass das von ihm ausgehende Licht schwächer war, als das gebeugte Licht bei einem Beugungswinkel, bis zu dem man die Vergleichung ausführen wollte.

Um das von dem Faden ausgehende Licht möglichst gleichmässig zu machen, wurde derselbe stark tordirt, was zur Folge hatte, dass das theilweise polarisirte Licht des Fadens weder in der Richtung des letzteren noch senkrecht dazu polarisirt war. Grösse und Richtung der Polarisation konnten durch einen Kalkspat und Nikol ausgewerthet werden.

Ich gebe zur Veranschaulichung des benutzten Apparates ein Schema desselben an.

Da, wie schon die Theorie vermuthen lässt, sehr grosse Intensitätsdifferenzen für verschiedene Beugungswinkel sich ergeben, so sollen im Folgenden die Angaben für die Amplituden erfolgen. Es sei a die des gebeugten Lichtes, v das Azimuth

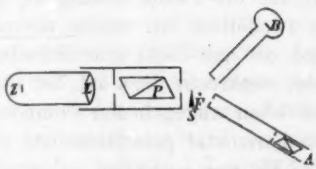
des Analysators gegen die Verticale, bei welchem Rand und Faden gleich hell erscheinen, b die Amplitude der halben Intensität des natürlichen Lichtes des Fadens, p die seines polarisirten Lichtes, φ das Azimuth des letzteren gegen die Verticale, so hat man für a folgende Gleichungen: für verticalpolarisirtes gebeugtes Licht

$$a_v = \frac{b\sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}\cos^2(\nu - \varphi)}}{\cos\nu},$$

für horizontalpolarisirtes gebeugtes Licht

$$a_h = \frac{b\sqrt{1 + \frac{p^2}{b^2}\cos^2(\nu - \varphi)}}{\sin\nu}.$$

p/b und φ waren für alle Beobachtungen dieselben vorher ausgewertheten Grössen, ν war mit dem Beugungswinkel veränderlich und wurde jedesmal abgelesen; nur b blieb unbekannt, aber unveränderlich, so dass man aus dem Verhältniss a/b die Abnahme der Intensität im geometrischen Schatten erhielt.



Z leuchtender Zirkonkörper, *L* Linse. *P* Polarisator, *S* Schirm, *F* Coconfaden. *B* Beleuchtungsvorrichtung des Fadens, *A* Analysator.

Es war wünschenswerth, auch die Intensität des ungebeugten Lichtes mit der für irgend einen Beugungswinkel zu vergleichen. Da indessen beide Lichtarten verschiedene Wellenflächen haben, so war es unmöglich, dieselben auf einfache und sichere Weise zu vergleichbaren Bildern zu vereinigen. Man musste daher auf den Versuch sich beschränken, ob nicht durch Rechnung für b ein Werth gefunden werden konnte, so dass für eine grössere Reihe von Beobachtungen Uebereinstimmung mit der Theorie stattfindet. Dieses ist nun für Beugungswinkel δ von 2^0 bis 10^0, für welche die Abnahme der Intensität besonders charakteristisch ist, in dem Maasse gelungen, dass die Uebereinstimmung mit der Theorie für diese Strecke als erwiesen anzusehen ist. Bevor ich jedoch die Beobachtungsresultate angebe, ist es nöthig, den aus der Theorie für den vorliegenden Fall sich ergebenden Ausdruck der Am-

plitude zu betrachten, um die Umstände, die bei der Ausführung der einzelnen Beobachtungsreihen zu beachten waren, kennen zu lernen.

Da es zweifelhaft ist, durch welche der in § 3 besprochenen Lösungen und durch welche Wellenfunctionen die Wellen bestimmt sind, die von der Lichtquelle ausgehen, durch eine Linse eben oder fast eben gemacht und durch einen Nikol linearpolarisirt sind, so sollen die durch Beobachtungen gewonnenen Resultate mit dem in der Theorie einfachsten Falle verglichen werden, indem bei parallel oder senkrecht zum Schirmrande polarisirtem Licht, das in der Richtung der Z-Axe auffällt, die Wellen einmal durch die Function U, das andere Mal durch V bestimmt sind. Dann ergibt sich für die eine Componente als Amplitude $a_1 = 2\pi B_1 F / \lambda$, für die andere $a_2 = 2\pi A_1 F \cos\delta / \lambda$, wobei für die erste Lösung $B_1 = B$, $A_1 = A$ ist, für die zweite Lösung $B_1 = A\, 2\pi / \lambda$, $A_1 = B \,.\, 2\pi / \lambda$. Da es zweifelhaft ist, welche dieser Lösungen hier die richtige ist, und ob das Licht eine Schwingung in der Polarisationsebene oder senkrecht dazu ist, ist es unmöglich auszusagen, welche der oben angegebenen Componenten die vertical, und welche die horizontal polarisirte ist.

Es war nun aber

$$F = \frac{f}{4\sqrt{2\pi B_{33}}} \cdot \frac{1}{\varrho_1 \varrho_0} \left(\frac{\varkappa_0}{\varrho_0} - \frac{\varkappa_1}{\varrho_1} \right),$$

$$4 B_{33} = \frac{\gamma_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{\gamma_0^2}{\varrho_0^2} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_0^2}{\varrho_1 \varrho_0} + \frac{(\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0)^2}{\varrho_1 \varrho_0}.$$

Für den vorliegenden Fall ist:

$$\begin{array}{lll} \varrho_1 = \infty, & \alpha_0 = \sin\delta, & \alpha_1 = 0, \\ \varrho_0 = 310\,\mathrm{mm}, & \beta_0 = 0, & \beta_1 = 0, \\ \frac{\varkappa_0}{\varrho_0} - \frac{\varkappa_1}{\varrho_1} = 1 + \cos\delta, & \gamma_1 = 1, & \gamma_0 = -\cos\delta, \end{array}$$

so dass man erhält:

$$F = \frac{1 + \cos\delta}{\sqrt{8\pi \varrho_1 \cos\delta}} \cdot f.$$

Da die Messungen sich erst von 2° an ausführen liessen, so kann man sich auf die Darstellung von f für grosse Beugungswinkel beschränken, in welcher (§ 2 Gleichung 15)

$$f = \sqrt{K^2 + S^2}$$

war. Da ferner schon für $\delta = 30'$ der Fehler kleiner als 0,0001 ist, falls f dem ersten Gliede der Reihe für S gleich gesetzt wird, so soll dieses geschehen; es ergibt sich:

$$f = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\xi_1 \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi\varrho_0}} \,.\, \operatorname{cotg} \delta.$$

Werden jetzt, um bei den Angaben möglichst Decimalstellen zu vermeiden, die Amplituden des auffallenden Lichtes $2\pi B_1 / \lambda\varrho_1$ und $2\pi A_1 / \lambda\varrho_1 = 10000$ gesetzt, so wird die Amplitude für die eine Componente

$$a_1 = \frac{10\,000}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}} \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2},$$

für die andere

$$a_2 = \frac{10\,000}{4\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}} \operatorname{cotg} \frac{\delta}{2} \,.\, \cos\delta.$$

Da für alle Farben die Abnahme der Amplitude bei der Beugung für $\delta > 30'$ dieselbe ist, und bei den Messungen der Proportionalitätsfactor b unbekannt bleibt, so ist es gleichgiltig, welchen Werth man für λ einsetzt; es wird bei den folgenden Angaben die Wellenlänge der D-Linie $\lambda = 0{,}000\,589$ benutzt werden.

Stellt man nun das Quadrat der Amplitude oder die Intensität als Function von δ in rechtwinkligen Coordinaten graphisch dar, so sieht man, dass die Curve von 1° bis ungefähr 10° eine starke Krümmung hat und dass sie dann in jedem Intervalle von 5° für δ angenähert geradlinig verläuft. Dieser Umstand war bei den Beobachtungen in folgender Beziehung zu beachten. Als Lichtquelle diente ein Zirkoncylinder mit weissglühender Basisfläche. Diese hatte einen Durchmesser von 9 mm. Da die Linse, welche das Licht parallel machte, eine Brennweite von 11 cm hatte, so wichen die Richtungen der äussersten parallelen Strahlenbündel um $\pm$ 2,4° von der mittleren Richtung, für welche $\delta = 0$ gesetzt wurde, ab. Die für den Winkel δ beobachtete Intensität war daher ein gewisser mittlerer Werth der Intensitäten, zwischen den Winkeln $\delta - 2{,}4°$ und $\delta + 2{,}4°$. Dieser mittlere Werth kann nur dann mit dem Werthe für δ übereinstimmen, falls die

Intensität in diesem Intervalle als lineare Function des Beugungswinkels zu betrachten ist. Dieses ist angenähert nur für $\delta > 10^0$ der Fall. Für kleinere Beugungswinkel musste daher die Lichtquelle entsprechend verschmälert werden, sie erhielt die Breite von 2 mm, während ihre Höhe dieselbe blieb, so dass die Abweichungen der äussersten Strahlenbündel gegen die mittlere Richtung $\pm 0{,}5^0$ in der Horizontalebene betrugen. Dann gaben die Beobachtungen schon von $\delta = 2^0$ an brauchbare Werthe.

Der Verlauf der Curve war indessen auch noch in folgender Beziehung von Bedeutung. Es war nicht möglich, die Richtung $\delta = 0$ genau aufzufinden, nach vorher angestellter Schätzung betrug der mögliche Fehler bis zu $0{,}5^0$. Dieser Fehler war für Beugungswinkel $\delta > 10^0$ unwesentlich, dagegen für die ersten Grade äusserst bedeutend. Es musste daher versucht werden, ob für die betreffenden Beobachtungsreihen eine Correction der Beugungswinkel, welche die oben angegebene Grenze nicht überschritt, sich finden liess, sodass die Uebereinstimmung mit der Theorie hergestellt war. Dieses gelang auch in vollkommen genügendem Maasse.

Endlich ist zu erwähnen die Behandlung der Stahlschneide als Beugungsschirm. Die beste zur Verfügung stehende Stahlschneide hatte einen Schneidenwinkel von $21{,}3^0$. Jedoch war, wie die Beobachtungen an anderen Stahlschneiden, die auch mit grosser Sorgfalt angefertigt waren, zeigten, die Grösse dieses Winkels unwesentlich. Die geringen Abweichungen, welche beobachtet wurden, können vollständig durch geringere Güte des Randes erklärt werden. Auch die Stellung der Schneidenflächen gegen die Einfallsrichtung war für die Grenzen, in denen die Beobachtungen ausgeführt wurden, ohne Bedeutung. Zwar hat Gouy[1]) häufig eine Abhängigkeit der Intensität von der Stellung der Schneide beobachtet, indessen erklärt er selbst diese Thatsache durch die verschiedene Krümmung des Schirmrandes. Für sehr scharfe Schneiden, wie die benutzte, tritt jedenfalls dieser Einfluss ganz zurück gegen die Bedeutung, welche die Reinigung des Randes von Staubtheilchen hat. Sie wurde erreicht durch Ueberstreichen mit

1) Gouy, l. c. p. 157—158.

einem Blättchen faserfreien Seidenpostpapiers, welches sich als das beste Mittel bewährte. Mangelhafte Reinigung bewirkte, dass für grössere Beugungswinkel die Intensität oft um mehr als die Hälfte geschwächt wurde. Nur von geringem Einfluss war dagegen die Reinigung auf die verhältnissmässig grosse Intensität der Beugung für kleinere Winkel.

Es mag bei dieser Gelegenheit eine Beobachtung erwähnt werden, die sich nach den obigen Bemerkungen leicht erklären lässt. Es wurde statt eines Schirmes ein von zwei feinen Stahlschneiden gebildeter Spalt beobachtet. Beide Schneiden waren nicht von ganz gleicher Güte und konnten, da sie sehr nahe gegenüberstanden, nicht jederzeit in genügender Weise gereinigt werden. Es zeigte sich, dass, während für gewisse Beugungswinkel auf einer Seite der Beugung die Helligkeit beider Schneiden fast gleich erschien, die Helligkeit beider für dieselben Beugungswinkel auf der anderen Seite grosse Differenzen zeigte. Diese Thatsache beweist, welch bedeutenden Antheil die verschiedene Schärfe der Furchenränder bei Gittern an der Erscheinung hat, dass die Intensität zu beiden Seiten der Einfallsrichtung für gleiche Beugungswinkel nicht gleich ist.[1])

Die Beobachtungen wurden nur für die ersten Grade von Grad zu Grad angestellt, für grössere Beugungswinkel nur alle 5—10 Grade. Die Einstellungen erfolgten auf volle Grade von δ. Im Folgenden sind jedoch schon die durch die wahrscheinliche Correction $\varDelta\delta$ von δ verbesserten Werthe in der Form $\delta + \varDelta\delta$ angegeben.

Die angegebenen Zahlen sind in der Weise aufgestellt, dass die aus den Beobachtungen gewonnenen Verhältnisszahlen der Amplituden für die ersten 10 Grade mit einem solchen Proportionalitätsfactor multiplicirt wurden, dass sie Uebereinstimmung mit den berechneten Werthen zeigten; für grössere Beugungswinkel ist dieses unmöglich, doch liess sich durch theilweise Wiederholung der ersten Beobachtungsreihen ein Anschluss an diese finden. Ich gebe hier einzelne dieser Reihen der beobachteten Amplituden a_v und a_h, die sowohl untereinander als auch mit mehreren anderen, die hier nicht mitgetheilt sind, gute Uebereinstimmung aufweisen, an und daneben zum Ver-

1) Fröhlich, Wied. Ann. **22.** p. 172. 1884.

gleich die Werthe der berechneten Amplituden a_1 und a_2. Die positiven Beugungswinkel geben die innere Beugung, die negativen die äussere an.

I.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
2 +0,3	52	55	55	5 +0,3	22	24	24
3 +0,3	38	38	38	7 +0,3	18	17	17
4 +0,3	31	29	29	10 +0,3	13	12	12

II.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
2 −0,2	72	70	70	7 −0,2	19	18	18
3 −0,2	45	45	45	10 −0,2	14	13	13
4 −0,2	31	33	33	15 −0,2	8,1	8,4	8,1
5 −0,2	27	26	26	20 −0,2	5,7	6,4	5,9

III.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
5	25	25	25	20	4,7	6,2	5,8
7	18	18	18	25	3,6	4,9	4,5
10	12	13	12	35	2,1	3,5	2,9
15	7,5	8,3	8,0				

IV.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
15	8,1	8,3	8,0	75	0,35	1,4	0,37
25	3,5	4,9	4,5	−15	4,6	8,3	8,0
35	2,1	3,5	2,9	−25	1,8	4,9	4,5
45	1,2	2,6	1,9	−35	0,80	3,5	2,9
55	0,88	2,1	1,2	−45	0,58	2,6	1,9
65	0,60	1,7	0,73	−55	0,65	2,1	1,2

V.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
15	8,1	8,3	8,0	−45	0,64	2,6	1,9
25	3,4	4,9	4,5	−55	0,88	2,1	1,2
−15	4,3	8,3	8,0	−65	1,5	1,7	0,73
−25	1,8	4,9	4,5	−75	1,68	1,4	0,37
−35	0,82	3,5	2,9	−85	1,73	1,2	0,10

VI.

δ	a_v	a_1	a_2	δ	a_v	a_1	a_2
10	13	13	12	− 6	26	21	21
15	8,1	8,3	8,0	− 7	21	18	18
20	5,8	6,2	5,8	− 10	16	13	12

VII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
2 +0,3	50	55	55	5 +0,3	25	23	23
3 +0,3	38	38	38	7 +0,3	18	17	17
4 +0,3	31	29	29	10 +0,3	13	12	12

VIII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
2 −0,2	67	70	70	7 −0,2	17	18	18
3 −0,2	43	45	45	10 −0,2	12	13	13
4 −0,2	32	33	33	15 −0,2	7,4	8,4	8,2
5 −0,2	25	26	26	20 −0,2	4,7	6,3	5,9

IX.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
3 −0,3	49	47	47	15 −0,3	7,3	8,5	8,2
4 −0,3	35	34	34	20 −0,3	4,7	6,3	5,9
5 −0,3	26	27	27	25 −0,3	2,8	5,0	4,6
6 −0,3	24	22	22	−6 −0,3	38	20	20
10 −0,3	12	13	13	−8 −0,3	23	15	15

X.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
20	4,9	6,2	5,8	35	1,4	3,5	2,9
25	2,9	4,9	4,5	40	1,0	3,0	2,3
30	1,9	4,1	3,5	45	0,66	2,6	1,9

XI.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
10	13	13	12	− 6	37	21	21
15	7,6	8,3	8,0	− 7	30	18	18
20	4,9	6,2	5,8	− 10	24	13	12
25	3,2	4,9	4,5	− 15	14	8,3	8,0

XII.

δ	a_h	a_1	a_2	δ	a_h	a_1	a_2
10	12	13	12	−45	3,7	2,6	1,9
15	7,5	8,3	8,0	−55	3,6	2,1	1,2
25	3,2	4,9	4,5	−65	3,2	1,7	0,73
−25	5,2	4,9	4,5	−75	2,8	1,4	0,37
−35	4,1	3,5	2,9	−85	2,9	1,2	0,10

Zum übersichtlichen Vergleich der Theorie und Beobachtung verweise ich auf die beigefügten graphischen Darstellungen.

Es beweisen in Bezug auf die innere Beugung die Beobachtungsreihen I, II und III für die Verticalcomponente, die Reihen VII, VIII und IX für die Horizontalcomponente die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung bis ungefähr $\delta = 10^0$ oder 15^0, worin ein zweiter Beweis dafür zu sehen ist, dass die vorliegende Erscheinung im wesentlichen der Theorie entspricht. Dagegen zeigen die Reihen III und IV für die Verticalcomponente und besonders die Reihen X und XI für die Horizontalcomponente von $\delta = 15^0$ an bedeutende Abweichungen derart, dass die beobachteten Grössen kleiner sind als die berechneten, sodass auch keine lineare Combination von a_1 und a_2 die Beobachtungen genau wiederzugeben imstande ist.

Die für die äussere Beugung gegebenen Zahlen zeigen keine so gute Uebereinstimmung mit der Theorie und untereinander, wie die für die innere Beugung. Für gewisse Stellen übertrifft die beobachtete Intensität die berechnete (Reihe: VI, IX, XI, XII). Der Grund dafür ist in Reflexionen am Rande der Schneide zu finden. Dieselben waren bei gewisser Stellung der Schneide und bei grossen Beugungswinkeln leicht festzustellen, wenn das von der Schneide herkommende Licht zum Theil depolarisirt war. Sie konnten dann durch eine Drehung des Schirmes um den Rand vermieden werden. Bei der äusseren Beugung wurde also eine Abhängigkeit der Helligkeit von der Stellung der Schneide beobachtet, die jedoch nicht der Beugung, sondern der Reflexion zuzuschreiben ist. Dagegen konnten Reflexionen von Licht, das ebenso polarisirt war wie das gebeugte, unmöglich erkannt und vermieden

werden. In Bezug auf die eigenthümliche Reflexion des Lichtes an sehr feinen Schneiden verweise ich auf Gouy.[1])

Die Abweichungen für grössere Beugungswinkel, sind zum Theil zu erklären durch Beeinflussungen der Lichtbewegung in der nächsten Nachbarschaft des Schirmes, deren Wirkung im § 1 durch den Werth des $\int\limits_R \Omega\, ds$ zusammengefasst ist. Indessen sind die Abweichungen sicher nicht vollständig diesem Einflusse zuzuschreiben, sondern es wirken dabei auch noch die Abweichungen von der Voraussetzung der Theorie mit, welche einen absolut scharfen und geraden Schirm annahm. Sicher sind allerdings die Abweichungen beider Componenten von einander in der Farbe (die Horizontalcomponente zeigt nie Färbung) und theilweise auch in der Intensität als durch das Material des Schirmes hervorgerufen zu betrachten. Diese Unterschiede in dem Verhalten beider Componenten waren in den Arbeiten von Gouy und Wien vorzüglich Gegenstand der Untersuchung, und daher ist es erklärlich, wenn Wien dem Material des Schirmes eine besonders wichtige Rolle bei Bildung der Erscheinung zuschreibt. Nach dem jetzigen Ergebniss hat man diese Erscheinung aufzufassen als zum allergrössten Theil durch einfache Beugung hervorgerufen, während der unzweifelhafte Einfluss des Materials schwer von den Störungen durch die fehlerhafte Gestalt des Schirmes zu trennen ist.

Nachtrag.

Nach Abschluss der vorliegenden Arbeit erhielt ich Kenntniss von einer erst vor kurzem erschienenen Arbeit von Poincaré[2]), „Sur la polarisation par diffraction“, welche ebenfalls die von Gouy beschriebene Erscheinung theoretisch behandelt. Diese Behandlung unterscheidet sich von obiger sehr wesentlich dadurch, dass Poincaré keine Kugelwelle mit divergenten Strahlen auf den Schirmrand auffallen lässt, sondern ein durch eine cylindrische Linse convergent gemachtes Strahlenbündel, dessen Brennlinie im Schirmrande

1) Gouy, l. c. p. 186 u. 187.
2) Poincaré, Acta mathemat. **16.** p. 297. 1893.

liegt, wodurch die Einführung Bessel'scher Functionen ermöglicht wird. Ausserdem berücksichtigt Poincaré den Einfluss des metallischen Schirmrandes auf die electromagnetischen Schwingungen, durch den er unter anderem den Polarisationszustand des gebeugten Lichtes erklärt. Es wäre von Interesse, zu sehen, inwieweit unter den oben angegebenen Bedingungen ausgeführte Intensitätsmengen die theoretischen Resultate bestätigen.

Königsberg i. Pr., Math.-physikal. Laborat., Dec. 1892.

3. *Darstellung gekrümmter Lichtstrahlen und Verwerthung derselben zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung; von Otto Wiener.*

§ 1. Bahn eines Lichtstrahls in stetig veränderlichem Mittel.

Wenn ein Lichtstrahl ein durchsichtiges, einfach brechendes Mittel, bestehend aus einer Reihe planparalleler Schichten von endlicher Dicke und verschiedenem Brechungsvermögen durchsetzt, so wird er eine mehrfach gebrochene Linie beschreiben. Denkt man sich die Schichten der Einfachheit halber horizontal ausgebreitet, so bildet der Lichtstrahl mit der Verticalen an beliebiger Stelle einen Winkel, dessen Sinus dem Snellius'schen Brechungsgesetz zufolge mit dem Brechungsexponenten an derselben Stelle ein constantes Product erzeugt.

Folgen die Schichten bei verschwindender Dicke in unendlicher Anzahl aufeinander, während der Brechungsexponent gleichzeitig sich stetig ändert, so geht die Bahn des Lichtstrahls aus der mehrfach gebrochenen in eine stetig gekrümmte Linie über. Dieselbe wird im allgemeinen auf gleiche Weise durch das genannte Brechungsgesetz bestimmt sein.

Welche Bahn wird aber der Lichtstrahl beschreiben, wenn er in horizontaler Richtung in das stetig veränderliche Mittel eintritt, d. h. in einer Richtung, längs deren der Brechungsexponent unverändert bleibt? Man könnte vermuthen, dass er unabgelenkt die gegebene Richtung beibehält. Denn so würde er vollkommen dem Snellius'schen Brechungsgesetz genügen. Diese Vermuthung trifft aber keineswegs zu: Der Lichtstrahl krümmt sich sofort, indem er sich Schichten mit wachsenden Brechungsexponenten zuwendet. Ja die Krümmung ist bei horizontalem Eintritt am stärksten.

Wie klärt sich dieser Widerspruch auf? Das Snellius'sche Gesetz leitet sich aus dem Grundgesetz der Wellenbewegung, dem Huygens'schen Princip, ab; indess nur für den Fall homogener Mittel; im vorliegenden Fall aber schliesst dieses Princip einen geradlinigen Fortgang des Lichtstrahls aus.

Es seien $A\,A'$ (vgl. Fig. 1.) zwei Punkte der Wellenfläche des in horizontaler Richtung eintretenden Lichtstrahls. Sie bilden die Erschütterungscentren zweier mit verschiedener Geschwindigkeit c und c' sich ausbreitender Elementarwellen, welche für den Moment nach Ablauf eines kleinen Zeittheilchens durch die um A und A' gelegten Kreise dargestellt werden, deren Radien mit c und c' proportional sind.[1]) Nach diesem Zeittheilchen geht also die Wellenfläche durch die gemeinsame Berührende $B\,B'$. Der Schnitt M dieser Linie mit der Verticalen $A\,A'$ ist der Krümmungsmittelpunkt des Lichtstrahls. Sein Abstand von A, d. h. der Krümmungsradius r, ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $A\,B\,M$ und $A\,C\,A'$. Wird der Abstand $A\,A'$ mit dx, der Unterschied von c und c' mit dc bezeichnet, so folgt:

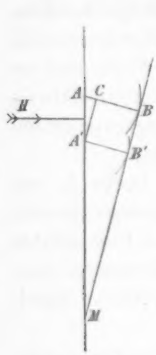


Fig. 1.

$$dx : r = dc : c.$$

Da die procentische Aenderung der Lichtgeschwindigkeit gleich derjenigen des Brechungsexponenten ist, d. h.:

$$dc : c = dn : n\,^{2}),$$

so ist auch:

$$dx : r = dn : n,$$

also $r = n : dn\,/\,dx$.

Wird das Gefälle des Brechungsexponenten $dn\,/\,dx$ mit n' bezeichnet, so folgt für den Krümmungsradius des Lichtstrahls die einfache Beziehung:

$$(1) \qquad r = \frac{n}{n'}.$$

Der Krümmungsradius eines Lichtstrahls, welcher horizontal in ein horizontal geschichtetes, längs der Verticalen stetig veränderliches Mittel eintritt, ist gleich dem Verhältniss des Brechungsexponenten zu dessen verticalem Gefälle an der Eintrittsstelle.

Die obige Ableitung gestattet die folgende allgemeinere Fassung des Satzes:

Der Krümmungsradius eines Lichtstrahls in stetig veränder-

1) Und welche im Vergleich zu $A\,A'$ unendlich klein zu denken sind.

2) In der Sprache der Differentialrechnung folgt aus $nc = c_0$ (Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum): $ndc + cdn = 0$, woraus sich bei Einführung der absoluten Werthe die obige Beziehung ergibt.

lichem Mittel ist in einem beliebigen Punkt gleich dem daselbst bestehenden Verhältniss des Brechungsexponenten zu dessen Gefälle, genommen in Richtung des durch ihn gehenden Krümmungsradius.

Das Gefälle in dieser Richtung ist gleich dem maximalen in verticaler Richtung mal dem Cosinus des durch die beiden Richtungen bestimmten Winkels w (vgl. Fig. 2.), oder mal dem Sinus des Einfallwinkels e zwischen Strahlrichtung und der Verticalen. Daher:

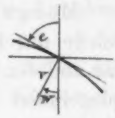


Fig. 2.

$$r = \frac{n}{n' \sin e},$$

wenn n' wieder das verticale Gefälle des Brechungsexponenten bezeichnet. Dabei ist die concave Seite der Krümmung stets der Richtung wachsender Brechungsexponenten zugewandt.

Vorstehendes Gesetz der Krümmung der Lichtstrahlen lässt sich zwar auch aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz ableiten, selbst für den Fall streifender Incidenz, indem man den gebrochenen Strahl berechnet; es ist hier aber auch ein unabgelenkter reflectirter denkbar, welcher beim Zurückgehen auf das Huygens'sche Princip ausgeschlossen erscheint.

Die Darstellung dieser Sachlage ist in keiner Weise neu, doch wohl wenig bekannt. Bevor ich daher zur Mittheilung meiner Versuche schreite, welche auf eine Darstellung sichtbarer Bahnen gekrümmter Lichtstrahlen und deren Verwerthung zur Untersuchung von Diffusion und Wärmeleitung abzielten, möchte ich von einigen Arbeiten über gekrümmte Strahlen berichten, deren Kenntniss nicht sehr verbreitet sein dürfte, zum Theil wegen der Art der Veröffentlichung nicht sein kann, die aber, wie ich glaube, von ausserordentlichem Interesse sind und deren eine die Veranlassung zur vorliegenden Arbeit war.

§ 2. Literatur über gekrümmte Strahlen.

Die Kenntniss von der Möglichkeit stetig gekrümmter Lichtstrahlen ist eine sehr alte, veranlasst durch das Studium der Strahlenbrechung in unserer Atmosphäre, welche ein Mittel veränderlicher körperlicher und somit auch optischer Dichte darstellt. Die von der Atmosphäre bewirkte Ablenkung des Lichtes der Gestirne oder irdischer Gegenstände, vorzüglich auch die durch besondere atmosphärische Zustände hervorge-

rufenen aussergewöhnlichen Erscheinungen der Luftspiegelung oder Fata Morgana waren an der Schwelle unseres Jahrhunderts Gegenstand vieler Untersuchungen, unter denen die von Monge, Wollaston, Laplace und Biot hervorragen.

Monge[1]) berichtet über eine Luftspiegelung in Aegypten, welche durch die vom heissen Boden erwärmte Luft verursacht war und den vor Durst schmachtenden Soldaten die Nähe einer spiegelnden Wasserfläche vortäuschte. Monge will die Erscheinung auf totale Reflexion an der erhitzten Luft zurückführen, trifft hiermit aber nicht das Wesen der Sache.

Diesem kommt Wollaston[2]) schon viel näher, indem er annimmt, dass in einem stetig veränderlichen Mittel ein mit den Schichten parallel gerichteter Lichtstrahl auf die Seite der dichteren abgelenkt wird infolge deren grösserer brechenden, d. h. anziehenden Kraft, eine Annahme, die vom Standpunkt der damals vorherrschenden Emissionstheorie geboten erschien und ohne weiteres die geradlinige Fortpflanzung ausschloss.

Wollaston's Arbeit zeichnet sich aber vor allem durch die vielen schönen Experimente über gekrümmte Lichtstrahlen aus, denen gegenüber die später mitzutheilenden Versuche nur als Abänderungen erscheinen, die allerdings für die gewünschten Zwecke wesentlich waren. U. a. ahmt er durch Diffusionsschichten zwischen verschiedenen Flüssigkeiten, z. B. zwischen Alkohol und Wasser oder zwischen Wasser und Syrup den Zustand der Atmosphäre nach und erhält auf diese Weise im ersten Fall unter, im zweiten über dem nahezu unabgelenkten Bild ein verkehrtes und ein noch stärker abgelenktes aufrechtes Bild eines hinter dem Diffusionsgefäss befindlichen Gegenstandes. Solche drei Bilder sind bei atmosphärischer Strahlenbrechung möglich, je nachdem bei ausreichend starkem Gefälle der Brechungsexponent der Luft nach oben oder unten zunimmt. Solche Bilder vermochte er auch willkürlich durch Anwendung heisser Körper oder kalter Dämpfe (von Aether, Alkohol, Wasser) in Luft auf mannigfache Weise zu erzeugen.

1) Monge, Sur le phénomène d'Optique connu sous le nom de mirage. Description de l'Égypte. I. 1799. (Citat nach J. Macé de Lépinay et A. Perot vgl. p. 114).

2) Wm. H. Wollaston, On Double Images caused by Atmospherical Refraction. Philosophical Transactions XC. p. 239. 1800; übersetzt in Gilberts Annalen der Physik 11. p. 1. 1802.

Laplace[1]) und Biot[2]) behandeln den Gegenstand theoretisch vom Standpunkt der Emissionstheorie, ersterer für den dem Astronomen wichtigen Fall der normalen Strahlenbrechung, letzterer für die aussergewöhnlichen Verhältnisse bei Luftspiegelung. Dabei legt er meist die vereinfachende Annahme eines constanten Gefälles des durch den Ausdruck $n^2 - 1$ bestimmten Brechungsvermögens zu Grunde. Unter dieser Annahme muss der Lichtstrahl wie ein geworfener Körper die Bahn einer Parabel beschreiben.

Das obige Gesetz der Strahlenkrümmung fand ich zum erstenmal ausgesprochenermaassen bei Grunert[3]), jedoch nur aus dem Brechungsgesetz abgeleitet. Der erste, welcher die sachgemässe Ableitung aus dem Huygens'schen Princip gab, dürfte Bravais[4]) gewesen sein.

Aus der Krümmung der Lichtstrahlen in der Atmosphäre zog Kummer[5]) eine äusserst merkwürdige Folgerung. Wäre diese Krümmung auf einem Himmelskörper nur stark genug, so müsste man von einem Punkte desselben die ganze Oberfläche, also auch die Rückseite übersehen können. Nach diesem Verhalten, d. h. je nachdem ein solcher Ueberblick ausgeschlossen oder möglich ist, unterscheidet Kummer zwei Arten von Himmelskörpern. Zu der letzteren müsste z. B. der Jupiter gehören, selbst wenn dessen Atmosphäre auch nur den zwanzigsten Theil so stark als die der Erde wäre. Macht man die Annahme, dass die Luftmassen sich wie die Gesammtmassen dieser Planeten verhalten, so müsste einem auf dem Jupiter befindlichen Beobachter dessen Oberfläche erscheinen

---

1) Laplace, Oeuvres complètes. **4.** (Livre 10). p. 231. 1805.

2) Biot, Recherches sur les réfractions extraordinaires qui s'observent très-près de l'horizon. Paris, Mém. de l'Inst. 1809. p. 1—266. Im Auszug in Gilberts Annalen. **17.** p. 237 u. p. 366. 1814.

3) Grunert, Ueber die atmosphärische, vorzüglich die terrestrische Refraction, und über Refractionscurven im Allgemeinen. Grunerts Archiv der Mathematik und Physik **10.** p. 1. 1847.

4) Bravais, Explication, par le système des ondes, d'un cas remarquable de la réfraction de la lumière. Ann. de chim. et de phys. 3 Sér. XLVI. p. 492. 1856.

5) Kummer, Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. Monatsberichte d. Kgl. Preuss. Ak. d. Wiss. zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. p. 405.

„als eine concave Schale, deren Rand, als scheinbarer Horizont sich um $3^0\ 48'$ über den wahren Horizont erhebt".

Noch interessantere und wichtigere Folgerungen hat neuerdings A. Schmidt[1]) aus dem Gesetze der Strahlenbrechung in einer Reihe schöner und anregender, leider nur theilweise schwer erreichbaren Abhandlungen gezogen. In der ersten gibt er, mit den Arbeiten von Grunert und Bravais unbekannt, eine Ableitung des Gesetzes der Strahlenkrümmung aus dem Huygens'schen Princip in einer elementar einfachen, ihm eigenthümlichen Weise, indem er ein Medium von constantem Gefälle der Lichtgeschwindigkeit der Betrachtung zu Grunde legt.

Die Erscheinungen der Luftspiegelung werden sodann mit elementaren mathematischen Mitteln unter vereinfachenden Voraussetzungen in anschaulicher Weise erklärt.

Den Schluss bildet der interessante, wenn auch sehr hypothetische Versuch, die Aberration des Fixsternlichtes ohne die Annahme eines freien Durchströmens des Aethers durch den bewegten Erdkörper zu erklären. Eine durch Aufstauung vor der Erde bewirkte Verdichtung des Aethers — die Möglichkeit einer solchen zugegeben — und die hinter derselben entstehende Verdünnung würde ein Gefälle des Brechungsexponenten in Richtung der Erdbewegung erzeugen, infolge dessen ein von aussen ankommender Lichtstrahl eine scheinbare Ablenkung erfahren muss, die unter genau angegebenen Bedingungen dem beobachteten Betrag der Aberration gleichkommt.

In zwei weiteren Abhandlungen[2]) wendet Schmidt die Gesetze der Refraction auf die Fortpflanzung der Erdbebenwellen an. Da es wahrscheinlich ist, dass die Elasticität der Erde mit der Tiefe zunimmt, und zwar in stärkerem Verhältniss als die Dichte, so ergibt sich daraus eine nach der Tiefe

1) Dr. A. Schmidt, Professor am Kgl. Realgymnasium in Stuttgart, Die cyklische Refraction. Programm des Kgl. Realgymnasiums in Stuttgart. 1878. Eine theilweise Inhaltsangabe der Abhandlung gab Schmidt in einer Notiz in der Zeitschr. für Math. und Phys. **24.** p. 60. 1879, welche auch eine allgemeine Betrachtung über die Wellenfläche eines nicht homogenen isotropen Mediums enthält.

2) A. Schmidt, Ein Beitrag zur Dynamik der Erdbeben. Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württemberg. p. 248. 1888. Untersuchungen über zwei neuere Erdbeben, das schweizerische vom 7. Jan. 1889 u. das nordamerikan. v. 31. Aug. 1886. Ebd. p. 200. 1890.

wachsende Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erschütterungswellen und somit eine gekrümmte, nach oben concave Form der Stossstrahlen. Eine auf diese Annahme gegründete Berechnung der scheinbaren Ausbreitungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen an der Erdoberfläche stimmt mit den Beobachtungen besser überein als bei der Annahme constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit und gestattet gleichzeitig die Tiefe des Erdbebenherdes zu ermitteln.

Die bedeutendsten Folgerungen dürfte Schmidt in einer selbständig erschienenen Abhandlung „Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik“[1]) gezogen haben, welche die in einem Vortrag „Was folgt aus den neuesten Beobachtungen der Axendrehung der Sonne?“[2]) ausgesprochenen Gedanken weiter ausführt. Die Abhandlung knüpft an die oben erwähnte von Kummer an, spricht aber das Eintheilungsprincip der beiden Arten von Himmelskörpern einfacher aus. Bei der ersten Art ist nämlich der Krümmungsradius r der Lichtstrahlen an der Oberfläche, wie bei der Erde, grösser, bei der zweiten kleiner als der Radius R des Himmelskörpers selbst.

Schmidt wirft die Frage auf, zu welcher Art die Sonne gehört. Vergleichsweise ist bei der Erde $r = 4{,}26\ R$ (constante Temperatur von 0^0 C. vorausgesetzt). Nun ist der Sonnenradius aber 108 mal so gross als derjenige der Erde, also noch über 25 mal so gross als der Krümmungsradius der Lichtstrahlen auf der Erde. Die Sonne müsste demnach schon ein Himmelskörper zweiter Art sein, wenn der Zustand ihrer Atmosphäre auch nur demjenigen der unserigen gliche in einer Höhe, wo die Luft 25 mal so verdünnt ist wie an der Erdoberfläche, umsomehr aber, da die Sonnenatmosphäre die unserige vermuthlich an Stärke bedeutend übertrifft und das Gefälle der Atmosphärendichte wegen der grösseren Anziehungskraft an der Sonnenoberfläche grösser ist als an der Erdoberfläche.

Diese Bemerkung klärt nun ein Räthsel auf, welches das Vorhandensein des scharfen Sonnenrandes uns stellte. Der Anschein lässt eine scharfe Grenze zwischen einem flüssigen

---

1) Stuttgart, Verlag von J. B. Metzler, 1891.

2) Jahreshefte des Vereins für vaterl. Naturkunde in Württ. Sitzg. v. 12. Febr. 1891.

Sonnenkörper und einer gasförmigen Atmosphäre vermuthen. Die hohe Temperatur auf der Sonne, die wohl die kritische Temperatur der meisten Stoffe übersteigt, macht es andererseits wahrscheinlich, dass ein Unterschied der Aggregatzustände nicht besteht, vielmehr die Dichte von aussen nach innen in stetiger Weise zunehmen muss. Woher rührt aber dann der scharfe Sonnenrand?

Schmidt zeigt, dass ein leuchtender Gasball von den Dimensionen der Sonne, dessen Dichte ohne Unstetigkeitsgrenze von aussen nach innen zunimmt, einen Anblick gleich dem der Sonne gewähren muss. Die scheinbare Grenze fällt zusammen mit derjenigen um das Gravitationscentrum gelegten Kugel, der äusseren kritischen Sphäre, deren Radius gleich dem Radius der tangential an ihrer Oberfläche verlaufenden Lichtstrahlen ist und deren oberflächliche Dichte derjenigen der Erdatmosphäre noch um bedeutendes nachsteht. Denn ein Sehstrahl, welcher diese Kugel nur unter kleinem Winkel schneidet, wird im Bogen zu Tiefen geführt, welche ein continuirliches Spectrum aussenden. Dass ein solches von einem glühenden Gas bei genügendem Druck ausgestrahlt werden kann, ist bekannt (vgl. Schluss der Anm. p. 113). Ein Sehstrahl aber, der eine nur wenig ausserhalb jener kritischen Sphäre liegende concentrische Kugel berührt, muss sich wieder vom Gasball entfernen, ohne stark leuchtende Schichten durchsetzt zu haben. Daher besteht eine scheinbare Grenze, wenngleich eine Unstetigkeitsgrenze der Dichte fehlt: *Der Sonnenrand ist eine optische Täuschung.*

Müsste nun aber nicht die Sonne bei starker Atmosphäre einen gefärbten Rand zeigen? Dieser Einwand ist hinfällig, da die an der Oberfläche jener kritischen Sphäre vorhandene geringe Gasdichte eine merkliche Dispersion ausschliesst. Dagegen wird die von innen nach aussen stattfindende bedeutende Helligkeitsabnahme der Sonnenscheibe verständlich.[1])

1) Dieser Punkt ist genauer untersucht in der einen von zwei zusammen veröffentlichten Arbeiten von H. Seeliger (Notiz über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre; Ueber die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre. Sitzungsber. d. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. Math. phys. Klasse. **21.** p. 239 u. 247. Sitzung v. 7. Nov. 1891), deren Inhalt sich mit den Schmidt'chen Darlegungen berührt. Seeliger berechnet aus den Vogel'schen Beobachtungen der Helligkeit der Sonnenscheibe in verschiedenen Abständen von ihrer Mitte und für verschiedene Farben

Ist die Strahlenbrechung auf der Sonne aber überhaupt beträchtlich, so muss sie einen grossen, bisher unterschätzten Einfluss ausüben auf die Beobachtungen der Vorgänge in den obersten Sonnenschichten. Schmidt sucht durch die Berücksichtigung derselben die scheinbaren Widersprüche in den Bestimmungen der Sonnenrotation aufzuklären. Den Einfluss auf die Erscheinungen der Protuberanzen dürfte er indess überschätzt haben.

Diese wichtigen Folgerungen aus dem Gesetze der Strahlenkrümmung beseitigen ein Hinderniss, welches bisher der Auffassung entgegenstand, dass *die Sonne im wesentlichen die Beschaffenheit eines leuchtenden Gasballes besitze, dessen Dichte ohne Unstetigkeit von aussen nach innen zunimmt,* womit natürlich über das Wesen des Zustandes der Materie in grossen Tiefen

---

eine ziemlich starke Dispersion für die Sonnenatmosphäre. Dieselbe müsste eine beträchtliche Verschiedenheit des scheinbaren Sonnendurchmessers für verschiedene Farben zur Folge haben, welche aber nach den Messungen von Auwers nicht besteht. Den scheinbaren Widerspruch sucht Seeliger durch Annahme einer totalen Reflexion des aus dem Sonneninnern kommenden Lichtes am Sonnenrand zu lösen. Diese Annahme entspricht indess, wie Kummer und Schmidt zeigten, wohl nicht genau dem Sachverhalt. Vielmehr werden die nahe horizontal aus dem Innern ausgehenden Strahlen, nicht weil sie eine thatsächliche Reflexion erleiden, sondern weil ihre gegen das Sonneninnere concave Krümmung stark genug ist, wieder nach diesem zurückgeführt und so am Austreten verhindert. Jene Art der Darstellung macht daher auch die Abhandlungen Seeliger's dem besonderen Gegenstand vorliegender Arbeit fernerstehend; deren grosses Interesse, besonders in obigem Zusammenhang, wird indess die Mittheilung an dieser Stelle rechtfertigen. Seeliger berechnet ferner auch die Extinctionscoefficienten der Sonnenatmosphäre, deren Kleinheit eine geringe Höhe der letzteren vermuthen lässt, wenigstens „insoweit sie als nicht leuchtendes, absorbirendes Medium in Frage kommt". D. h. genauer, die diesen Messungen zu Grunde liegende innere Atmosphärengrenze ist eine Stelle, an der merklich ebensoviel Licht ausgestrahlt als von dem aus tieferen Schichten kommenden Licht absorbirt wird. Sie braucht also nicht eine Grenze des gasförmigen Aggregatzustandes zu sein, da nach Frankland (On the Combustion of Hydrogen and Carbonic Oxide in Oxygen under great pressure. Phil. Mag. (4) **36.** p. 309. 1868) Wasserstoff bereits unter 10 Atmosphären Druck ein sehr helles continuirliches Spectrum auszusenden vermag (vgl. auch Wüllner, Ueber die Spectra einiger Gase bei hohem Druck, Pogg. Ann. **137.**; sie braucht vor allem nicht eine Grenze irgend welcher physischer Unstetigkeit zu sein.

der Sonne bei gewaltigen Drucken und Temperaturen nichts gesagt sein kann. Sie schaffen ferner Bahn für die Anwendung der interessanten Ritter'schen „Untersuchungen über die Constitution gasförmiger Weltkörper".[1])

Die letztgenannte Arbeit von Schmidt war es, welche mir von der ganzen besprochenen Literatur zuerst in die Hände fiel. Sie bildete den Gegenstand eines Referates im hiesigen physikalischen Colloquium und erregte in mir den Wunsch, die gekrümmte Bahn eines Strahles sichtbar vor Augen zu führen. So entstanden noch vor meinem Bekanntwerden mit Wollaston's Arbeit die folgenden Versuche, die schon im Februar 1892 vor einem grösseren Kreise in der hiesigen naturwissenschaftlichen Gesellschaft gezeigt wurden.

Als auch schon ein Theil der daran sich anschliessenden Diffusionsversuche angestellt war, erschien im Septemberheft der Ann. de chim. et de phys. (6. sèr. A. XXVII. p. 94. 1892) eine Arbeit von J. Macé de Lépinay und A. Perot, betitelt „Contribution à l'étude du mirage", welche sich der gleichen Mittel zur Darstellung der gekrümmten Lichtstrahlen bedienen wie ich. Ihr Versuch wird noch erwähnt werden. Das wesentliche Ziel dieser Arbeit ist die genaue Erforschung der Luftspiegelung. Dazu haben sie experimentell die kaustische Linie des durch einen Punkt gehenden Lichtstrahlenbüschels in einer Diffusionsschicht ermittelt und mit ihrer Hülfe die Erscheinungen der Luftspiegelung mit einer bisher noch nicht erreichten Genauigkeit erklärt.

Die Verfasser erwähnen auch (p. 111), dass sie die genaue Aufnahme eines gekrümmten Lichtstrahles gemacht haben, um zu sehen, ob dieselbe zum Studium der Diffusionsgesetze verwendbar sei. Die im folgenden mitgetheilte neue Methode zur Bestimmung der Constanten der Diffusion und Wärmeleitung geht unmittelbarer zu Werke und weicht von dem durch diese Physiker versuchten Wege gänzlich ab.

§ 3. Darstellung sichtbarer Bahnen gekrümmter Lichtstrahlen.

Es lag nahe, den gekrümmten Weg eines Lichtstrahles in der Diffusionsschicht zweier verschiedenen Flüssigkeiten

1) Ritter, Wied. Ann. 1878—1889; Zusammenfassungen in Exner's Rep. 20. p. 379. 1884 und „Naturforscher" Jahrg. 17. Nr. 28—31. 1884.

durch eine fluorescirende Substanz, z. B. Fluorescin oder Magdalaroth (Naphtalinroth) sichtbar zu machen.

Dazu schienen wegen ihres sehr verschiedenen Brechungsvermögens Alkohol und Schwefelkohlenstoff besonders geeignet. Als Diffusionsgefäss diente ein Leybold'scher Glaskasten von 10 cm Höhe und Länge und von 1 cm Breite. Der fluorescirende Alkohol wurde zuerst eingegossen und dann durch ein fein ausgezogenes Glasrohr der Schwefelkohlenstoff darunter geschichtet. Dieser besitzt Eigenfluorescenz, die durch Zusatz weniger Tropfen fluorescirenden Alkohols verstärkt werden kann. Will man nicht warten, bis sich die Diffusionsschicht von selbst genügend verbreitert hat, so kann man durch vorsichtiges geeignetes Rühren an der Grenze der Flüssigkeiten ein auf kurzer Strecke annähernd gleichförmiges Gefälle der Concentration und somit des Brechungsexponenten herstellen.

Schickt man nun ober- oder unterhalb der Diffusionsschicht ein durch horizontalen Spalt gehendes paralleles Lichtbündel von Sonnen- oder electrischem Licht der Länge nach durch das Gefäss, so erkennt man den durch Fluorescenz sichtbar gemachten geradlinigen Gang der Lichtstrahlen (Fig. 3, p. 116). Treten dieselben aber innerhalb des Diffusionsgebietes ein, so werden sie in deutlichem Bogen nach unten abgelenkt.

Hier könnte man indess einwenden, dass die Ablenkung des Strahles durch eine, wenn auch kaum merkliche, schon vor Eintritt vorhandene Abweichung seiner Richtung von der Horizontalen begründet sei. Dem zu begegnen, sende man den Strahl schwach geneigt von unten ins Diffusionsgebiet (vgl. Fig. 4). Dann neigt er sich im aufsteigenden Bogen immer mehr der Horizontalen zu, die er aber sofort wieder verlässt, um einen zweiten, dem ersten symmetrischen, absteigenden Bogen zu beschreiben.

Der Bogen ist nach unten concav, weil Schwefelkohlenstoff einen grösseren Brechungsexponenten besitzt als Alkohol. Die concave Seite müsste nach oben gewandt sein, wenn der leichteren Flüssigkeit der grössere Brechungsexponent zukäme. Auf der Suche nach zwei geeigneten Flüssigkeiten, die dieser Bedingung bei ausreichender Differenz der Brechungsexponenten sowie diejenige der Mischbarkeit erfüllten, wurde mir von Hrn. Wüllner Chloroform und Schwefelkohlenstoff empfohlen. Die

Dichten dieser Flüssigkeiten sind bei 20° C. bezüglich 1,49 und 1,26; ihre Brechungsexponenten bei derselben Temperatur für die *D*-Linie 1,45 und 1,63. Die den obigen entsprechenden, mit diesen Flüssigkeiten ausgeführten Versuche sind in den Fig. 5 und 6 dargestellt.

Bahn eines Lichtstrahles

im Diffusionsgebiet verschiedener Flüssigkeiten, durch Fluorescenz sichtbar gemacht; $^1/_4$ natürlicher Grösse.

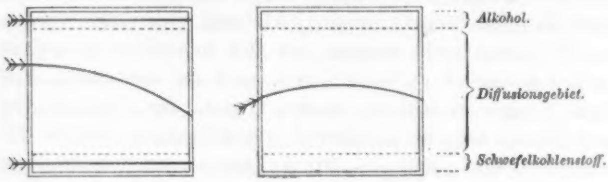


Fig. 3. Fig. 4.

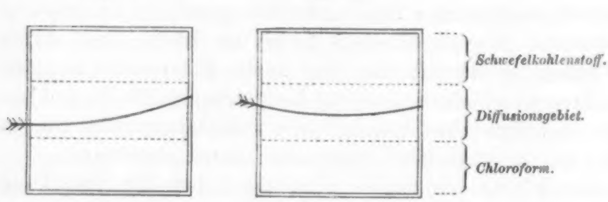


Fig. 5. Fig. 6.

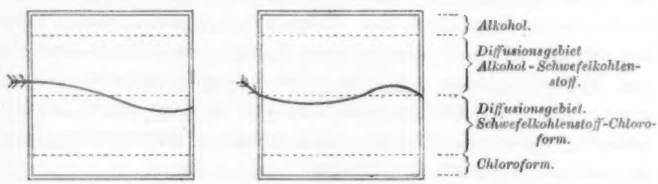


Fig. 7. Fig. 8.

Versuch von Macé de Lépinay und Perot

ca. $^1/_{10}$ natürlicher Grösse.

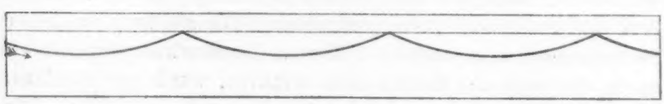


Fig. 9.

Es schien lohnend die drei Flüssigkeiten Alkohol, Schwefelkohlenstoff und Chloroform in dem nämlichen Gefäss über einander zu schichten. Ein Lichtstrahl musste dann zwischen den beiden ersten Flüssigkeiten seine concave Seite unten, zwischen den beiden letzten oben haben. Auf diese Weise entstehen Curven mit Wendepunkt, wie sie in den Fig. 7 und 8 wiedergegeben sind.

Die Curven wurden nach der Natur auf Pauspapier, das an eine Seitenwand des Diffusionsgefässes geheftet war, aufgenommen und in vierfach verkleinertem Maassstab anbei nachgebildet.

Fig. 9 stellt die hübsche Form dar, welche Macé de Lépinay und Perot (vgl. p. 114) ihrem Versuch gegeben haben. Sie bedienen sich eines 1 m langen, 15 cm hohen Glastroges, in welchem Alkohol und Wasser gegeneinander diffundiren. Der Lichtstrahl erleidet, an die Oberfläche des Alkohols gelangt, totale Reflexion und setzt seinen Weg in weiteren Bögen fort.

Das Gesetz der Strahlenkrümmung, d. i. die in § 1 abgeleitete Beziehung $r = n / n'$ liesse sich nun prüfen, wenn der Brechungsexponent n und dessen Gefälle n' in der durchstrahlten Schicht bekannt wäre. In Ermangelung dessen findet man leicht wenigstens eine obere Grenze für den Radius r der Strahlenkrümmung, wenn man die Höhe des Diffusionsgebietes a, d. h. den Abstand der dasselbe begrenzenden Stellen aufsucht, an denen der Lichtstrahl noch unabgelenkt bleibt. Nimmt man zwischen diesen Stellen gleichförmiges Gefälle an und bezeichnet mit $n_2 - n_1$ den Unterschied der Brechungsexponenten der beiden reinen Flüssigkeiten, so erhält man als mittleres Gefälle $n' = (n_2 - n_1) / a$ und als mittleren Brechungsexponenten $n = (n_2 + n_1) / 2$ und daraus einen mittleren Krümmungsradius $r = a(n_2 + n_1) / 2(n_2 - n_1)$. Dieser Werth bildet gleichzeitig für den Radius der Strahlenkrümmung in der Mitte der Diffusionsschicht, wo das Gefälle thatsächlich am grössten sein wird, eine obere Grenze. So war bei Fig. 4 $a = 7{,}8$ cm, für Schwefelkohlenstoff $n_2 = 1{,}63$, für Alkohol $n_1 = 1{,}36$, also $r = (1{,}50 / 0{,}27) . 7{,}8 = 43$ cm die obere Grenze, während die unmittelbare Beobachtung einen in der That noch kleineren Krümmungsradius von ca. 15 cm ergab. Eine genauere experimentelle Bestätigung der Beziehung ergibt sich aus später folgenden andersartigen Messungen.

§ 4. **Bilder der durch ein Diffusionsgefäss gesehenen Gegenstände.**

Das Gefälle des Brechungsexponenten bei obigen Flüssigkeiten genügt, um selbst den in Richtung der Dickenausdehnung des Gefässes eintretenden, also nur eine Schicht von 1 cm Stärke durchsetzenden Lichtstrahlen eine merkliche Ablenkung zu ertheilen und so eine der Luftspiegelung ähnliche Erscheinung zu erzeugen, wie sie bei den oben besprochenen Versuchen von Wollaston beschrieben wurde. Ich füge hier nur noch hinzu, dass man bei dem Diffusionsgefäss mit den drei Flüssigkeiten Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Alkohol fünf Bilder erhalten kann, nämlich zu beiden Seiten des am wenigsten abgelenkten Bildes erst je ein verkehrtes und dann noch zwei, am stärksten abgelenkte, aufrechte Bilder.

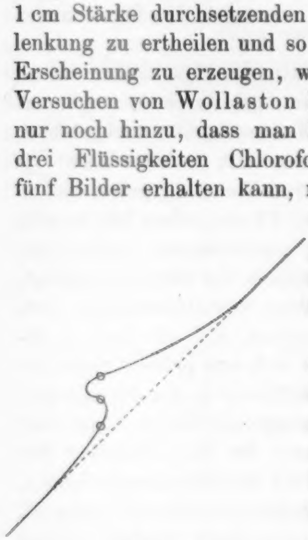


Fig. 10.

Auf die merkwürdige Verzerrung von Linien, die man durch das Diffusionsgefäss betrachtet, machte mich gelegentlich des Vorzeigens eines der obigen Versuche im physikalischen Colloquium zu Strassburg Hr. F. Kohlrausch aufmerksam. Um den Versuch auf eine einfache Form zu bringen spannte ich einen schwarzen Faden, der in der Mitte eine weisse Perle trug, unter 45° gegen die Horizontale geneigt auf und betrachtete ihn durch das Diffusionsgefäss mit Schwefelkohlenstoff und Alkohol; der Faden erscheint dann verzerrt wie die in Fig. 10 ausgezogene Linie mit drei Bildern der Perle.

Nun hatte ich schon bei den ersten oben erwähnten Versuchen daran gedacht, die Fragestellung umzukehren und durch gekrümmte Lichtstrahlen die Diffusion zu untersuchen. Die genaue Ausmessung des Weges des Lichtstrahls schien mir dazu aber kein einfacher Weg zu sein; der Versuch mit dem Faden schon eher. Auch Wollaston, bei dem ich diesen Versuch gleichfalls später beschrieben fand, hält ihn für schicklich den Zustand irgend eines zu untersuchenden Mediums zu prüfen.

Gleichwohl fand er kein Mittel, wie er selbst angibt, das Gesetz des Dichtigkeitsverlaufes im Diffusionsgefäss zu bestimmen. In der That kann die Beziehung, welche zwischen dem Dichtigkeitsgefälle und der Lage der Bilder bei dem Faden-Versuch keine einfache sein, da auf einer gewissen Strecke jeder Punkt des Fadens drei Bilder erzeugt. Der Versuch bedurfte daher einer weiteren Vereinfachung.

Ehe ich indess die neue Methode zur Untersuchung der Diffusion mittheile (§ 6), habe ich noch andere früher benutzte optische Methoden kurz zu besprechen, bei denen die Krümmung der Lichtstrahlen die Rolle einer Fehlerquelle spielte.

§ 5. Bisher angewandte optische Beobachtungsmethoden der Diffusion.[1]

Die eine Art optischer Methoden bestand in der Beobachtung der Drehung, welche die Polarisationsebene des durch einen Diffusionstrog mit planparallelen Wänden horizontal durchtretenden Lichtstrahls erfuhr; sie wurde von Hoppe-Seyler[2]) und Voit[3]) angewandt.

Die andere Art beruhte auf der Brechung des Lichtes in einem prismatischen Diffusionsgefäss. Wild und Simmler[4]) schlugen vor auf diese Weise unmittelbar den Brechungsexponenten der verschiedenen Schichten zu bestimmen. Dieses Verfahren wurde in sinnreicher Weise nach Kundts Angabe von Johannisjanz[5]) dahin abgeändert, dass ein solches Diffusionsprisma in einen weiteren planparallelen Trog gestellt wurde, der eine Lösung der zu untersuchenden Substanz von geeigneter Concentration enthielt. Die Stelle, an welcher im Diffusionsprisma gleiche Concentration wie aussen im Trog herrschte, sollte dann daran erkannt werden, dass sie das Bild eines vertical aufgehängten, durch Prisma und Trog betrachteten Fadens unabgelenkt liess.

---

1) Eine ausführliche Besprechung früher angewandter Diffusionsmethoden findet man im Lehrbuch der allgem. Chemie v. W. Ostwald, **1.** p. 674. 2. Aufl. 1891.

2) Hoppe-Seyler, Medic. chem. Untersuchungen, Berlin 1866.

3) Voit, Pogg. Ann. **130.** p. 227 u. 393. 1867.

4) Wild u. Simmler, Pogg. Ann. **100.** p. 217. 1857.

5) Johannisjanz, Wied. Ann. **2.** p. 24. 1877.

Alle diese Methoden besitzen aber die grosse, durch Stefan[1]) aufgedeckte Fehlerquelle, dass horizontale Lichtstrahlen beim Durchsetzen einer Diffusionsschicht abgelenkt werden. Um dies nachzuweisen beobachtete Stefan horizontale Marken durch planparallele Diffusionsgefässe und bemerkte die dabei auftretenden mit der Zeit sich ändernden Verzerrungen und die Ablenkung der horizontalen Strahlen. Eine solche wurde dem Leser in Fig. 3 u. 5 naturgetreu vor Augen geführt.

Aber die Fehlerquelle jener Methoden kann gerade als Grundlage einer neuen Methode dienen, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist.

§ 6. Objective Darstellung der Diffusionscurve und die physikalische Bedeutung ihrer geometrischen Grössen.

Das unerwünschte Auftreten mehrfacher Bilder bei dem in § 4 beschriebenen Versuche ist dadurch verursacht, dass von dem Faden Lichtstrahlen unter verschiedenen Winkeln auf das Diffusionsgefäss treffen. Sorgt man dafür, dass die Lichtstrahlen ein paralleles Strahlenbündel bilden, so muss eine eindeutige Beziehung zwischen Gegenstand und Bild eintreten.

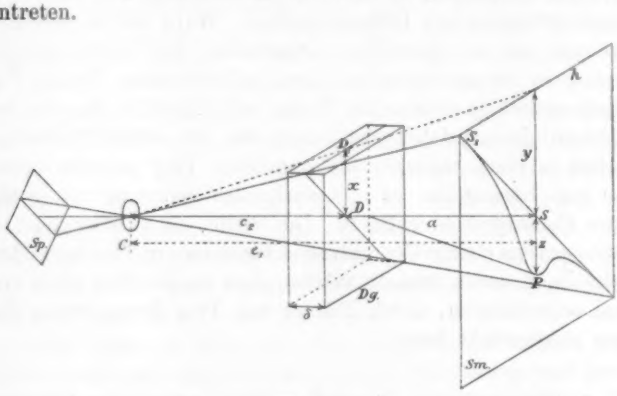


Fig. 11.

Ein unter 45° gegen die Horizontale geneigter Spalt (Sp. Fig. 11) empfängt das parallel gemachte Licht einer

1) Stefan, Sitzungsber. der math.-naturw. Classe der Wiener Akademie der Wissensch. 78. (2) p. 957. 1878.

electrischen Lampe und lässt durch eine Convexlinse (C) von etwa 17 cm Brennweite sein Bild auf einem 5—7 m entfernten Schirm (Sm) entstehen. Schaltete man nun in einiger (vgl. § 8) Entfernung vor diesem ein Diffusionsgefäss (Dg) von 1—2,5 cm innerer Dicke ein, so dass dessen grösste Seitenfläche von 10 cm im Quadrat sich nahe senkrecht den einfallenden Lichtstrahlen entgegenstellt, so wurde das Spaltbild zu einer Curve verzerrt, welche *Diffusionscurve* heissen möge. Dieselbe besitzt an den Stellen grösster Ablenkung bei Anwendung weissen Lichtes deutliche Dispersion, welche durch ein vor den Spalt gestelltes rothes Glas genügend aufgehoben werden kann.

Oben und unten, wo sich die übereinandergeschichteten Flüssigkeiten noch unvermischt erhalten haben, erfahren die Lichtstrahlen keine Ablenkung. Im Diffusionsgebiet aber werden sie, wie oben gezeigt, umgebogen und müssen daher eine Ablenkung erfahren, die der folgenden Ableitung gemäss dem Gefälle des Brechungsexponenten an der durchstrahlten Stelle proportional ist, abgesehen von einer sehr kleinen Correction.

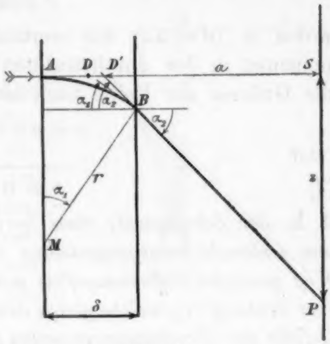


Fig. 12.

Der Lichtstrahl trete im Punkte A (vgl. Fig. 12) in das Diffusionsgefäss von der innen gemessenen Dicke δ ein, beschreibe einen Bogen vom Radius r mit dem Krümmungsmittelpunkt in M und treffe dabei unter dem Einfallwinkel α_1 im Punkte B gegen die zweite Wand des Gefässes, welches er unter dem Austrittwinkel α_2 in Luft verlasse um in P auf dem Schirm anzulangen. Unabgelenkt hätte er diesen in S erreicht, sodass $SP = z$ der Betrag der Ablenkung ist. Ferner sei a der optische Weg (d. h. Summe der durch die jeweiligen Brechungsexponenten dividirten geometrischen Abstände) zwischen S und dem auf AS in der Mitte des Gefässes liegenden Punkte D, d. i. auch der geometrische Abstand zwischen S und dem Schnittpunkt D' der Linien AS und PB, d. h. SD'. Die

Winkel α_1 und α_2 seien so klein, dass man sie selbst statt ihrer Sinus oder ihrer Tangenten in die Rechnung einführen darf. Dann ist

$$z = a \,.\, \alpha_2;$$

α_2 ist durch den Brechungsexponenten n der Flüssigkeit bei B bestimmt:

$$\alpha_2 = n \,.\, \alpha_1;$$

α_1 ist gleich dem Winkel AMB, daher:

$$\alpha_1 = \delta : r.$$

r endlich berechnet sich nach der in § 1 gegebenen Formel:

$$r = n \,/\, n',$$

wobei n' $(dn \,/\, dx)$ das verticale Gefälle des Brechungsexponenten in der durchstrahlten Schicht bedeutet. Setzt man die Grössen der Reihe nach ein, so ergibt sich:

$$z = a\,n\,\delta : n \,/\, n',$$

oder

$$(2) \qquad \boldsymbol{z = a\,\delta\,n'}.$$

d. h. *der Schnittpunkt eines horizontalen Lichtstrahls mit einem ihm senkrecht entgegengestellten Schirm erfährt durch ein in den Weg gesetztes Diffusionsgefäss mit zum Schirm parallelen Wänden eine Senkung (z), welche gleich dem Product ist aus dem verticalen Gefälle des Brechungsexponenten (n') an der durchstrahlten Stelle, der Dicke des Diffusionsgefässes (δ) und dem optischen Abstand (a) des Schirmes von der Mitte des Diffusionsgefässes.*

Die obige Ableitung macht einige vereinfachende Voraussetzungen. Die Dicke der Gefässwand wird bei Bestimmung des optischen Abstandes a berücksichtigt. Die Verschiedenheit des Brechungsexponenten beim Ein- und Austritt des Lichtstrahls (Punkte A und B Fig. 12), sowie die Abweichung der Tangente und des Sinus vom Winkel wird in erster Linie durch eine Correction berücksichtigt, für welche ich als Factor von z in obiger Gleichung fand:

$$\left[1 - \left(\frac{z}{a}\right)^2 \frac{2\,n^2 + 1}{4\,n^2}\right],$$

welcher für $z \,/\, a = 1/10$ noch nicht 1 Proc. und z. B. bei verdünnten wässerigen Lösungen ($n = 4/3$) erst etwa für $z \,/\, a = 1/25$ ein pro Mille von 1 abweicht. Endlich bleibt die Formel auch

ohne weiteres bei den kleinen Abweichungen der Strahlenrichtung von der Horizontalen, wie sie unter den angegebenen Versuchsbedingungen vorkommen, anwendbar.

Das Gefälle n' gilt genau genommen für den Punkt in der Mitte des vom Lichtstrahl beschriebenen Bogens. Derselbe liegt unter dem Punkte D des unabgelenkt gedachten Lichtstrahl um einen Betrag $\xi = z \,.\, \delta / 8\,n\,a$, welcher leicht unter 0,1 mm gehalten werden kann und in den meisten Fällen nicht in Betracht kommt. Für gewöhnlich wird man also n' auf den Punkt D beziehen dürfen.

Somit ist bereits die physikalische Bedeutung einer Ordinate z der Diffusionscurve ermittelt, d. h. des Abstandes einer ihrer Punkte P von dem vertical darüber liegenden S des unabgelenkten Spaltbildes (Fig. 11 und 13). Sie bedeutet, von einer Constanten abgesehen, das verticale Gefälle des Brechungsexponenten n' in einem Punkte D des Diffusionsgefässes, welcher in der Mitte desselben auf dem unabgelenkten Strahl gelegen ist.

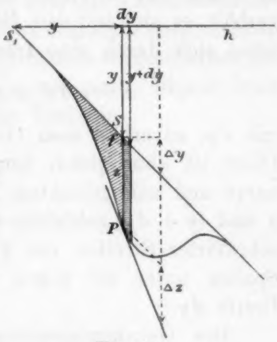


Fig. 13.

Um die Höhenlage von D angeben zu können, bezeichne man mit x dessen Abstand von dem oberen Ende des Diffusionsgefässes. Der entsprechende Abstand des Punktes S von der Projection h der obersten horizontalen Mittellinie des Gefässes auf den Schirm aus dem Centrum der Projectionslinse (C Fig. 11) sei y. y ist dann die Projection von x aus C. Bezeichnet man also mit e_1 den Abstand der Linse vom Schirm, mit e_2 den von der Mittelebene des Diffusionsgefässes und mit η das Verhältniss dieser Abstände, so ist:

$$\eta = e_2 / e_1 = x / y\,.$$

Auch die Tangente der Diffusionscurve in P besitzt eine wichtige Bedeutung. Sie bestimmt die Aenderung von z mit y, d. h. $dz / dy = \Delta z / \Delta y$ (s. Fig. 13), das ist auch:

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \eta \, \frac{dz}{dx}\,.$$

Nun ist aber $z = a\,\delta\,n'$, also:

d. h.: $$\frac{dz}{dy} = z' = \eta\,a\,\delta\frac{dn'}{dx} = \eta\,a\,\delta\frac{d^2 n}{dx^2} = \eta\,a\,\delta\,n''$$

(3) $$z' = \eta\,a\,\delta\,n''.$$

D. h. die Lage der Tangente bestimmt den zweiten Differentialquotienten des Brechungsexponenten mit der Höhe im Diffusionsgefäss, oder die Aenderung dessen Gefälles mit der Höhe, eine Grösse, die man als *Krümmung des Gefälles* bezeichnen könnte.

Der erste und zweite Differentialquotient von n lässt sich also aus der Diffusionscurve unmittelbar entnehmen. Wie verhält es sich mit dem Brechungsexponenten selbst? Derselbe muss sich durch eine Integration ergeben. Multiplicirt man

$$z = a\,\delta\,n' = a\,\delta\frac{dn}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{a\,.\,\delta\,.}{\eta}\,\frac{dn}{dy}$$

mit dy, so erhält man eine mit dn proportionale Grösse $z\,dy$. Diese ist aber gleich dem Flächenstück zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild, das seitlich durch die zu y und $(y + dy)$ gehörigen Ordinaten begrenzt wird (horizontal schraffirter Streifen der Fig. 13). Denn bei der Lage des Spaltes unter 45° gegen die Horizontale besitzt dieses die Breite dy.[1])

Die Gesammtzunahme des Brechungsexponenten vom höchsten Punkt D_1 (Fig. 11) im Diffusionsgefäss bis D ist also proportional der Summe in gleicher Weise gebildeter Flächenstücke zwischen S_1 und S (s. Fig. 13) oder proportional der durch Spaltbild, Diffusionscurve und die Ordinate z begrenzten Fläche (schräg schraffirt in Fig. 13).

Sei diese Fläche $= f$, sei ferner n_1 der Brechungsexponent in D_1, und n derjenige in D, so ist:

$$n - n_1 = \int_{n_1}^{n} dn = \int_0^y \frac{dn}{dy}\,dy = \eta\int_0^y n'\,dy = \frac{\eta}{a\,.\,\delta}\int_0^y z\,dy = \frac{\eta}{a\,.\,\delta}f\,,$$

also:

(4) $$n = n_1 + \frac{\eta}{a\,\delta}f.$$

1) Bei Abweichung des Spaltes von dieser Lage ist eine Correction erforderlich, welche bei den mitzutheilenden Versuchen nicht unterlassen wurde.

Integrirt man über die ganze Fläche F zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild, welche die *Diffusionsfläche* heissen möge, und bezeichnet den Brechungsexponenten der unteren Flüssigkeit, wo sie noch unvermischt, mit n_2, so ist:

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a\,\delta} F. \tag{4a}$$

Diese Formel gab die Möglichkeit an die Hand die Richtigkeit der bisherigen Entwickelungen, insbesondere auch das Gesetz der Strahlenkrümmung experimentell zu prüfen und zu bestätigen. Dieselbe verlangt insbesondere, dass die ganze Diffusionsfläche unabhängig von ihrer sich allmählich ändernden Gestalt constant bleiben muss, so lange die Diffusion noch nicht in merklicher Weise bis zu den Enden des Gefässes vorgeschritten ist.

Der wesentliche Inhalt dieses § sei noch einmal kurz zusammengestellt, zunächst durch die Formeln:

$$n = n_1 + \frac{\eta}{a\,.\,\delta} . f \tag{4}$$

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a\,.\,\delta} . F \tag{4a}$$

$$n' = \frac{dn}{dx} = \frac{1}{a\,.\,\delta} . z \tag{2}$$

$$n'' = \frac{d^2 n}{dx^2} = \frac{1}{\eta\,.\,a\,.\,\delta} \frac{dz}{dy} = \frac{1}{\eta\,.\,a\,.\,\delta} . z' \tag{3}$$

Hier bedeutet:

n der Brechungsexponent in einem Punkte D des Diffusionsgefässes im Abstande

x von der oberen Grenzfläche desselben;

n' das verticale Gefälle des Brechungsexponenten in D;

n'' die Krümmung dieses Gefälles in verticaler Richtung;

n_1, n_2 die Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten an der oberen und unteren Grenze des Gefässes;

η das Verhältniss der optischen Wege von der Projectionslinse bis zur Mitte des Diffusionsgefässes und bis zum Schirm;

a der optische Weg von der Mitte des Diffusionsgefässes bis zum Schirm;

δ die Dicke des Diffusionsgefässes, innen gemessen;

z die durch den Diffusionszustand bewirkte Ablenkung des

Schnittpunktes des durch D gehenden Lichtstrahles mit dem Schirm (vgl. Fig. 11), eine Ordinate der Diffusionscurve;

y die Projection von x auf den Schirm aus dem Mittelpunkte der Projectionslinse (vgl. Fig. 11);

F die ganze Diffusionsfläche, d. h. die ganze zwischen unabgelenktem Spaltbild und Diffusionscurve eingeschlossene Fläche;

f das durch die Ordinate z ausgeschnittene, nach oben (links, in Fig. 13) liegende Stück der Diffusionsfläche.

Der Unterschied der Brechungsexponenten der zur Diffusion gelangenden Flüssigkeiten ist der Diffusionsfläche, d. h. der zwischen Diffusionscurve und unabgelenktem Spaltbild liegenden Fläche proportional.

Für einen beliebigen Punkt D im Diffusionsgefäss berechnet sich der Brechungsexponent aus einem Stück der Diffusionsfläche, das durch die zu D gehörige Ordinate z der Diffusionscurve (vgl. Fig. 11) abgegrenzt wird; der erste Differentialquotient des Brechungsexponenten mit der Höhe oder das Gefälle desselben aus der Ordinate z selbst; der zweite Differentialquotient oder die Krümmung des Gefälles aus der Lage der Tangente an die Diffusionscurve in dem zu D gehörigen Punkte (P Fig. 11).

§ 7. Beeinflusst die Capillarität die Richtung der durch das Diffusionsgefäss tretenden Strahlen?

Man findet mehrfach den Gedanken ausgesprochen[1]), dass die Capillarität in einem Diffusionsgefäss eine merkliche Rolle spielt. Die Capillarconstante aneinander grenzender Schichten ist verschieden; es kann daher die Grenzfläche derselben nicht eben, sie muss an den Gefässwänden gekrümmt sein. Erstreckt sich diese Krümmung weit in das Innere des Gefässes? Beeinflusst sie in merklicher Weise die Richtung des durchtretenden Lichtstrahls?

Zur Beantwortung dieser Fragen bedenke man, dass die Capillarkräfte sich nur auf eine sehr kleine Entfernung erstrecken, welche nach Quincke jedenfalls unter einem Hunderttausendel Centimeter bleibt.

Während nun bei einer durch Luft begrenzten Flüssigkeit ein Punkt unter Zurücklegung einer solchen Strecke aus dem

1) Z. B. bei Johannisjanz l. c. p. 45.

Innern der Flüssigkeit in das Innere der Luft gelangen kann, so findet im Diffusionsgefäss dabei nur eine äusserst geringe Aenderung in der Beschaffenheit der Flüssigkeit statt. Die Capillarconstante zweier um 0,00001 cm von einander abstehenden Schichten kann nur sehr wenig verschieden, die capillare Steighöhe nur sehr klein sein. Thatsächlich beobachtete Quincke[1]) selbst bei so wenig mischbaren Flüssigkeiten wie Wasser und Oel eine mit der Zeit abnehmende relative Capillarconstante und fand diejenige in jedem Verhältniss mischbarer Flüssigkeiten gleich Null.

Gleichwohl möge der kleine Betrag der Lichtbrechung, der durch die Capillarwirkung zweier um 0,00001 cm von einander entfernten Schichten denkbar ist, überschlagen werden. Die Neigung der Schichtengrenze in unsichtbarer Entfernung von den Gefässwänden gegen die Horizontale mag sich vom Winkel 0° bis 90° in kleinem Bogen ändern und eine mittlere Neigung von 45° der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Der Lichtstrahl hat eine Grenzfläche solcher Neigung zweimal zu durchsetzen, beim Ein- und Austritt; dieselben schliessen untereinander einen Winkel von 90° ein. Man kann also so rechnen, als ob der Lichtstrahl ein rechtwinkeliges Prisma zu durchsetzen hätte, dessen Brechungsexponent von dem der Umgebung soviel abweicht als zwei Punkte im Diffusionsgefäss von einem verticalen Abstand gleich 0,00001 cm.

Dieser Unterschied Δn ist gleich 0,00001 n', wenn der Nenner von $n' = dn/dx$ in Centimeter angegeben wird. Der gesuchte kleine Ablenkungswinkel α des Lichtstrahls ergibt sich dann aus der Formel:

$$\frac{n + \Delta n}{n} = \frac{\sin\left(\frac{90 + \alpha}{2}\right)}{\sin\frac{90}{2}} = 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Also

$$\alpha = \frac{2\,\Delta n}{n} = 0{,}000\,02\,\frac{n'}{n}.$$

Da $n/n' = r$ (Formel 1, § 1, p. 106) der Krümmungsradius des Lichtstrahls im Diffusionsgefäss selbst in dem oben be-

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **139.** 1870. (Vgl. p. 18, 20 u. 28).

sprochenen extremen Fall der Diffusion von Alkohol gegen Schwefelkohlenstoff nicht unter 10 cm gefunden wurde, so wird α im allgemeinen nur einen Bruchtheil einer Secunde betragen.

Das Verhältniss der durch Capillarwirkung möglichen und durch die Strahlenkrümmung bewirkten, auf einem Schirme im Abstand a von der Mitte des Diffusionsgefässes beobachteten Ablenkungen ergibt sich nach Formel 2 (p. 122) gleich:

$$\frac{a\,\alpha}{z} = \frac{\alpha}{n'\,\delta} = \frac{0{,}000\,02}{n\,.\,\delta}\,.$$

D. h. erst wenn man die Dicke des Diffusionsgefässes gleich 1/100 cm wählen würde, wäre ein durch Capillarität verursachter Fehler denkbar von etwa 1 pro Mille. Diese Dicke war bei den folgenden Versuchen nie unter 1 cm. Es konnte also die Capillarität keinen merklichen Einfluss auf die Beobachtungen ausüben. Einen experimentellen Beweis dafür wird die im folgenden Paragraph gegebene Bestätigung der Formel 4a (p. 125) liefern.

Woher rührt aber die irrige Ueberschätzung des Einflusses der Capillarität? Die unmittelbare Beobachtung lässt eine gekrümmte Grenze zweier übereinander geschichteten Flüssigkeiten erscheinen. Diese Erscheinung beruht indess auf einer optischen Täuschung. Denn wir setzen einen geradlinigen Gang der Lichtstrahlen voraus, welcher im Diffusionsgefäss nicht besteht. Man überzeugt sich leicht von der Täuschung, wenn man in einem länglichen schmalen Glastrog fluorescirenden Alkohol auf Schwefelkohlenstoff geschichtet hat. Von der grösseren Seitenfläche aus gesehen erscheint dann die Trennungsfläche gekrümmt, während man von der Schmalseite aus in unmittelbarer Nähe der Glaswand die völlige Ebenheit derselben erkennt. Die in's Innere gehende Trennungsfläche erscheint aber auch hier wie eine aufsteigende Brücke.

Schickt man in Richtung der Dickenerstreckung in ein schmales Gefäss ein horizontales durch einen Spalt erzeugtes schmales paralleles Lichtbündel, so erscheint dies in der fluorescirenden Flüssigkeit von oben gesehen als eine leuchtende nahezu horizontale Fläche, von der Schmalseite aus dagegen bei Alkohol und Schwefelkohlenstoff wie eine vom Beobachter aus ansteigende, bei Schwefelkohlenstoff und Chloroform da-

gegen wie eine absteigende Lichtbrücke, die meist gebogen ist und an der ursprünglichen Trennungsschicht der beiden Flüssigkeiten sich in die scheinbar capillar gekrümmte Trennungsfläche hineinlegt.

Diese Beobachtungen werden davon überzeugen, dass der Anblick einer gekrümmten Grenzfläche zweier gegen einander diffundirenden Flüssigkeiten nicht durch Capillarität, sondern durch den gekrümmten Weg der Lichtstrahlen verursacht ist und die eingangs dieses Paragraphen gestellten Fragen mit „Nein“ zu beantworten sind.

§ 8. Versuche zur Bestätigung der zwischen dem Unterschied der Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten und der Diffusionsfläche aufgestellten Beziehung (Formel 4a).

Die Versuchsanordnung ist im wesentlichen anfangs des § 6 beschrieben. Da es sich zunächst um orientirende Versuche handelte, wurden die Diffusionscurven aus freier Hand nachgezeichnet. Wo bei weissem Licht merkliche Dispersion auftrat wurde die orange Curve benutzt.

Ein Versuch — mit Kochsalzlösung und Wasser — erfuhr eine genauere Ausführung. Die Curven wurden auf einer Bromsilbergelatineplatte photographisch aufgenommen. Farbige Gläser und Flüssigkeiten ermöglichten dabei indess nicht die Erzielung eines scharfen Bildes. Daher musste spectral zerlegtes Licht angewandt werden. Ein geradsichtiges Prisma entwarf ein Spectrum auf der Ebene eines feinen Spaltes, welcher blaues Licht von der Wellenlänge 464 $\mu\mu$ auswählte und dasselbe durch eine Linse und das nochmals mit einem spaltförmigen Diaphragma versehene Diffusionsgefäss nach der photographischen Platte sandte.

Die Auswerthung der Diffusionsfläche geschah bei den ersten Versuchen durch Construction. Die Fläche wurde in kleinere Stücke getheilt, deren krummlinige Begrenzung nur noch eine verhältnissmässig kleine Krümmung besass. Die krummlinige Begrenzungslinie wurde sodann durch eine sich möglichst anschmiegende Gerade ersetzt, welche dem Augenmass nach mit den übrigen Grenzlinien die gleiche Fläche einschloss wie die krumme Linie. Da die so corrigirte Fläche von der Gesammtfläche nur einen kleinen Theil bildete, so war der Fehler dieses Verfahrens vermuthlich kleiner als der

bei der Aufzeichnung der Curve gemachte. Die gesammte Diffusionsfläche wurde also in dieser Weise in Dreiecke und Trapeze zerlegt, deren Inhalt leicht auszumessen war.

Bei den photographirten Curven wurden die verticalen Entfernungen der Curvenpunkte von dem unabgelenkten Spaltbild, das zum Schluss nach künstlicher, vollkommener Mischung der Flüssigkeiten gleichfalls aufgenommen war, in Intervallen von 1 mm, bei stärkerer Krümmung auch von 0,5 mm mit dem Kathetometer gemessen. Die horizontalen Verschiebungen der Platte wurden dabei mit einer Theilmaschine ausgeführt, an welcher dieselbe zu den Messungen befestigt war. Die so ermittelten Coordinaten dienten dann zur Bestimmung der Diffusionsfläche unter der Annahme, dass die von ihnen ausgeschnittenen Curvenstücke als geradlinig zu betrachten seien.

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Messungen zur Prüfung der Formel 4a (p. 125):

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a \cdot \delta} \cdot F.$$

Die Diffusionsfläche wurde bei jedem Versuch aus verschiedenen Curven ermittelt (Spalte 5 der folgenden Tabelle) und daraus das Mittel genommen (Spalte 6). Die Brechungsexponenten der benutzten Flüssigkeiten wurden mit dem Abbe'schen Totalrefractometer gemessen, nur bei Kochsalzlösung aus der Interpolationsformel von Börner[1]) berechnet. λ gibt die Wellenlänge der benutzten Farbe, τ die Mitteltemperatur der Flüssigkeiten während der Beobachtungen an.

Die Einzelwerthe für F weichen bei den 3 ersten Versuchen um Beträge ab, die bei der primitiven Art der Messung nicht auffallend sind. Da die von oben nach unten gelesenen Zahlen jeweils Diffusionsflächen für zunehmende Zeiten (vgl. Fig. 14—16 p. 134 u. 135) entsprechen, so erkennt man das Fehlen systematischer Abweichungen. Die Einzelwerthe für die photographirten Curven stimmen besser untereinander überein. Die aus den Mittelwerthen von F berechneten und die beobachteten Werthe der Brechungsexponentenunterschiede in der 7. und 8. verticalen Spalte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen überein. Somit bestätigt sich die oben aufgestellte Beziehung.

1) Wüllner, Experimentalphysik, 2. p. 188. 4. Aufl. 1883.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Flüssigkeiten	η	a (cm)	δ (cm)	F (cm^2)	F Mittel	$\frac{\eta}{a.\delta} F$	$n_2 - n_1$	λ ($\mu\mu$)	τ (° C)
Alkohol-Schwefelkohlenstoff	0,941	30,9	1,027	9,12 9,03	9,07	0.269	0,265	589 (*D*)	20,3
Schwefelkohlenstoff-Chloroform	0,941	30,9	1,027	6,12 6,25 6,00 6,22	6,15	0,182	0,183	589 (*D*)	19,2
Wasser-Silbernitratl. (60 g $AgNO_3$ 39,95 g H_2O)	0,925	50,8	1,027	6,33 5,89 5,93 6,27	6,10	0,108	0,112	656 (*C*)	17,8
Wasser-Kochsalzlös. Photogr. Curven (15 g Na Cl 100,05 g H_2O)	0,738	147,1	2,536	12,50 12,49 12,56 12,78	12,58	0,0249	0,0247	464	16,6

§ 9. **Ermittelung der Diffusionsconstanten aus den Diffusionscurven auf graphischem Wege. — Die Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Concentration offenbart sich aus der gegenseitigen Lage der Diffusionscurven.**

Die Differentialgleichung der Diffusion in einem Gefäss constanten Querschnitts lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

dabei bedeutet u die Concentration, d. h. die in der Volumeneinheit enthaltene Gewichtsmenge der einen Substanz, t die Zeit, x die Höhe im Diffusionsgefäss, k die Constante der Diffusion.

Bei vorliegender Beobachtungsmethode werden nun nicht die Functionen der Concentration sondern die des Brechungsexponenten ermittelt. Die Aenderungen der Concentration sind aber denjenigen des Brechungsexponenten nahezu, wenn auch nicht genau, proportional. Die Proportionalität trifft z. B. bei Kochsalz mit grösserer Genauigkeit zu als die Mischungsformel. Ich habe mich davon überzeugt, dass die Abweichungen vom Gesetze der Proportionalität sehr klein sind und bei orientirenden Versuchen unberücksichtigt bleiben durften. Setzt man also unter Benutzung zweier Constanten c_1 und c_2:

$$u = c_1 + c_2 n,$$

so wird:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_2 \frac{\partial n}{\partial t},$$

und:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \frac{\partial^2 n}{\partial x^2};$$

und die Diffusionsgleichung geht über in:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},[1]$$

d. h. in eine Differentialgleichung, bei der die Concentration durch den Brechungsexponenten ersetzt ist.

Die Differentialquotienten dieser Gleichung lassen sich unmittelbar aus den Diffusionscurven entnehmen. Nach § 6 (p. 126) berechnet sich n aus einem Stück f der Diffusionsfläche, $\partial n / \partial t$ also aus der Zunahme desselben bei gleicher Grenzabscisse in der Zeiteinheit. $\partial^2 n / \partial x^2 = n''$ ergibt sich aus der Lage der Tangente an die Diffusionscurve an derselben Stelle und somit k als das Verhältniss dieser beiden Differentialquotienten.

Es war (Formel 4 p. 125):

$$n = n_1 + \frac{\eta}{a \,.\, \delta} f,$$

also ist:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\eta}{a \,.\, \delta} \frac{\partial f}{\partial t}$$

Ferner war (Formel 3 p. 125):

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{\eta\, a\, \delta} z';$$

also ist:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{k}{\eta^2} z'.$$

Sei das Stück der Diffusionsfläche für die Abscisse y (vgl. Fig. 13 p. 123) und für zwei verschiedene Zeiten t_1 und t_2 gleich f_1 und f_2, so erhält man durch Integration:

---

1) Fasst man n als beliebige Function von u auf, so lautet die allgemeine Gleichung:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - k \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 \frac{\dfrac{\partial^2 n}{\partial u^2}}{\left(\dfrac{\partial n}{\partial u}\right)^2},$$

wobei im Falle $\partial n : \partial u$ nahezu constant, das letzte Glied die Rolle einer Correctionsgrösse spielt.

$$f_2 - f_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial t}\, dt = \frac{k}{\eta^2} \int_{t_1}^{t_2} z'\, dt.$$

Zur Bestimmung von k ist also zunächst die Aufzeichnung zweier Diffusionscurven nöthig; dann ist $f_2 - f_1 = \Delta f$ der Zuwachs der Diffusionsfläche für die Abscisse y eine durch die beiden Diffusionscurven, das unabgelenkte Spaltbild und die zu y gehörige Ordinate abgegrenzte Fläche. Die letztere Grenze beschränkte sich bei den Versuchen meist auf einen Punkt, da als Abscisse meist die eines Schnittpunktes zweier Diffusionscurven gewählt wurde, wenn derselbe nicht zu nahe an dem Punkte grössten Gefälles lag (vgl. Fig. 14—16).

Ferner muss man zur Bestimmung von

$$\int_{t_1}^{t_2} z'\, dt$$

die Abhängigkeit der Neigung der Tangente für die Abscisse y von der Zeit kennen. Wählt man y geeignet so, dass sich diese Neigung in dem benutzten Zeitintervall wenig ändert, so genügt eine zwischenliegende Diffusionscurve, um graphisch das Integral zu ermitteln, indem man in einer Hülfscurve z' als Function von t aufträgt. Sei $\Delta t = t_2 - t_1$, und Z' der Mittelwerth von z' in dem betrachteten Intervall, d. h.:

$$Z' \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} z'\, dt,$$

so ist

$$k = \eta^2 \frac{\Delta f}{Z' \Delta t}. \tag{5}$$

Die Dimension dieses Ausdrucks in demnach, wie es sein muss, $[l^2 / t]$. Im Folgenden sind, wie üblich, l in *cm*, t in Tagen ausgedrückt. Vor der Mittheilung von Zahlen soll indess noch eine allgemeine Bemerkung Platz finden.

Gleich bei den ersten Versuchen mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff fiel mir auf, dass die Stelle maximaler Ablenkung der Diffusionscurve nicht auf derselben Verticalen verblieb, sondern sich seitlich in Richtung wachsender Brechungsexponenten verschob, d. h. dass der Punkt maximalen Gefälles nicht in derselben Höhe im Diffusionsgefäss blieb, sondern nach unten sank, nach der Seite zunehmenden Schwefelkohlen-

stoff-Gehaltes der Flüssigkeit. Diese Verschiebung ist in Fig. 14 u. 14a zu sehen.

Abbildung des Diffusionsvorgangs durch die Aenderung der Diffussionscurven bei fortschreitender Diffusion.

Erklärung: Fig. 14, 15 u. 16 stellen Diffusionscurven dar in $^1/_2$ nat. Grösse für die Zeiten t nach Versuchsbeginn (Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit unter die leichtere). Fig. 14a, 15a u. 16a sind aus den ersteren abgeleitet und auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen mit Abscissen y (vgl. 125 u. Fig. 13) proportional den Höhen im Diffusionsgefäss vom oberen Ende nach unten gemessen, und mit Ordinaten z proportional dem Gefälle des Brechungsexponenten. Die Punkte mit grössten z sind mit Kreuzchen bezeichnet. Es bedeutet e_1 Abstand der Projectionslinse vom Schirm, a Abstand der Mitte des Diffusionsgefässes vom Schirm, δ Dicke des Diffusionsgefässes, innen gemessen, λ Wellenlänge des benutzten Lichtes, τ mittlere Temperatur im Diffusionsgefäss, u Concentration (g in 10 cm³).

Alkohol (98 Proc.) — Schwefelkohlenstoff.

$e_1 = 522,5$, $a = 30,9$, $\delta = 1,027$ cm; $\lambda = 589\ \mu\mu$, $\tau = 20,3^0$ C.; $t_1 = 3,72$, $t_2 = 12,70$, $t_3 = 21,63$ Stunden.

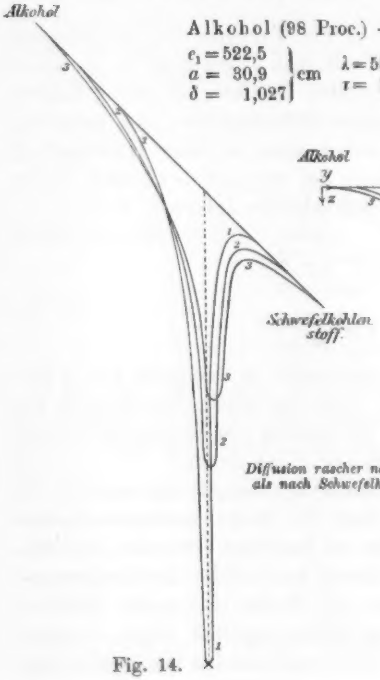


Fig. 14.

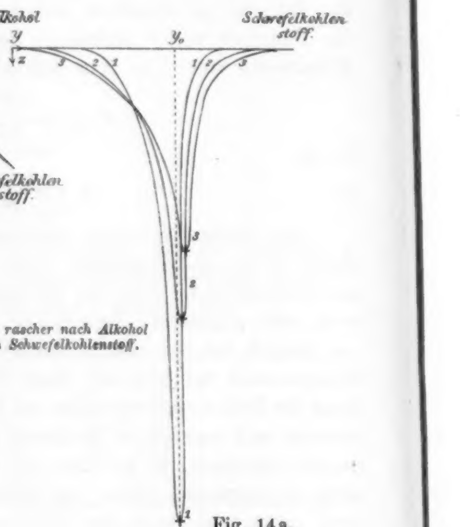


Fig. 14a.

Wasser — Salzsäure II ($u = 28{,}4$).

$\left.\begin{matrix} e_1 = 676{,}5 \\ a = 100{,}6 \\ \delta = \ \ 1{,}027 \end{matrix}\right\}$ cm $\quad \begin{matrix} \lambda = 656\ \mu\mu \\ \tau = \ 16{,}5^0\ \text{C.} \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} t_1 = 0{,}48 \\ t_2 = 1{,}03 \\ t_3 = 2{,}02 \\ t_4 = 4{,}18 \end{matrix}\right\}$ Stunden

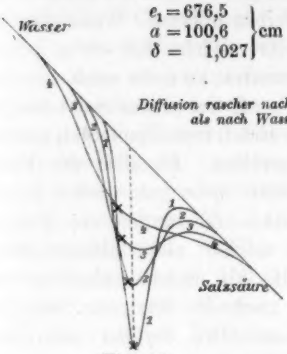


Fig. 15.

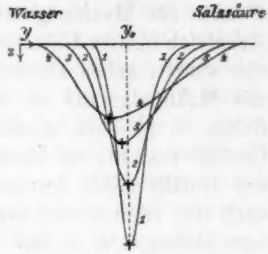


Fig. 15a.

Ammoniak II ($u = 25{,}2$) **— Wasser.**

$\left.\begin{matrix} e_1 = 677{,}2 \\ a = 150{,}5 \\ \delta = \ \ 2{,}536 \end{matrix}\right\}$ cm $\quad \begin{matrix} \lambda = 656\ \mu\mu \\ \tau = \ 17{,}1^0\ \text{C.} \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} t_1 = \ \ 0{,}64 \\ t_2 = \ \ 1{,}45 \\ t_3 = \ \ 3{,}86 \\ t_4 = 13{,}66 \end{matrix}\right\}$ Stunden

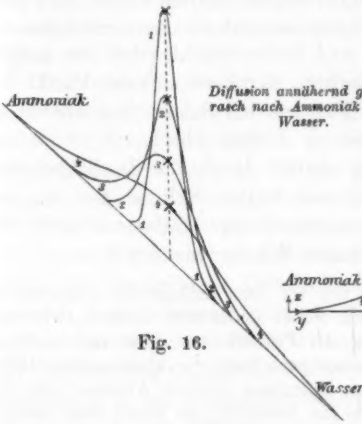


Fig. 16.

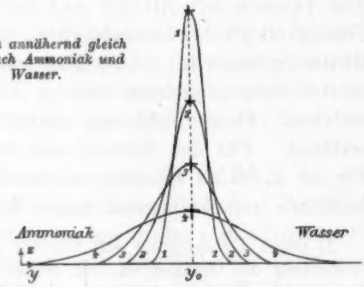


Fig. 16a.

Diese Verschiebung des Punktes maximalen Gefälles wies darauf hin, dass sich die Diffusion nach verschiedenen Seiten mit verschiedener Geschwindigkeit vollzog. Denn bei gleicher Diffusionsgeschwindigkeit hätte sich die anfänglich schmale Diffusionsschicht zwischen den unvermischten Flüssigkeiten

symmetrisch nach beiden Seiten verbreiten und die Stelle maximalen Gefälles an ihrem Orte bleiben müssen. Wenn dagegen die Diffusion nach der einen Seite, welche die erste heissen möge, rascher erfolgt als nach der zweiten, so muss auch von dem Punkte des Maximalgefälles aus nach der ersten Seite hin der Ausgleich in dem Unterschied der Brechungsexponenten rascher von statten gehen als nach der zweiten. Da aber der Punkt mit Maximalgefälle ein solcher sein muss, zu dessen beiden Seiten in gleichen unendlich kleinen Abständen ein gleiches Gefälle besteht, so kann er ein solcher nicht bleiben, wenn das Gefälle nach der ersten Seite hin rascher abnimmt als nach der zweiten und muss sich nach der letzteren Seite hin verschieben,[1]) d. h. *der Punkt maximalen Gefälles muss nach der Seite wandern, nach welcher die Diffusion langsamer erfolgt.*

Um dieses Ergebniss zu prüfen, stellte ich Versuche mit drei wässerigen Lösungen an, welche nach Scheffer[2]) eine beträchtliche Abnahme, beträchtliche Zunahme und annähernde Constanz des Diffusionscoefficienten bei wachsender Concentration ergaben. Das erste trifft bei salpetersaurem Silber, das zweite bei Salzsäure und das dritte bei Ammoniak zu. Betrachtet man bei dem Versuch mit Alkohol und Schwefelkohlenstoff die erstere Flüssigkeit als das Lösungsmittel, so musste sich der Punkt des Maximalgefälles im ersten Fall wie bei Schwefelkohlenstoff im zweiten entgegengesetzt und im dritten überhaupt nicht verschieben. Diese Folgerung wurde durch die Beobachtungen bestätigt. Für den zweiten und dritten Fall ist dies aus den Fig. 15 u. 16 zu ersehen, welche einige Diffusionscurven für Salzsäure und Ammoniak gegen Wasser wiedergeben.

---

1) Diese Ueberlegung gilt nur für eine anfängliche symmetrische Vertheilung des Gefälles, um den Punkt maximalen Gefälles, wie man sie bei Uebereinanderschichtung der Flüssigkeiten annähernd erreichen kann. Würde man von vornherein nach Seite der abnehmenden Diffusionscoefficienten willkürlich eine bedeutend stärkere Abnahme des Gefälles als nach der anderen Seite hin herstellen, so würde man dadurch die Diffusion in Richtung abnehmender Diffusionscoefficienten beschleunigen und unter Umständen eine Verschiebung des Maximums in umgekehrtem Sinne wie oben bewirken können. Diesen Zusammenhang glaube ich bei einem Versuche über Wärme-Diffusion in Wasser beobachtet zu haben. Der obige Satz sammt seinen Einschränkungen lässt sich aus der erweiterten Diffusionsgleichung (§ 11) quantitativ erörtern.

2) Scheffer, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**. p. 390. 1888.

Eine weitere Bestätigung des Gesagten liefern die auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Diffusionscurven der Fig. 14 a, 15 a u. 16 a. *Die seitliche Ausbreitung ihrer beiden Curven-Aeste gestatten ein unmittelbares Urtheil über die verhältnissmässige Diffusionsgeschwindigkeit in beiden Richtungen.* Von der Abscisse y_0 des Punktes mit Maximalgefälle an gerechnet, welcher nahezu der Höhe der ursprünglichen Trennungsebene der beiden Flüssigkeiten entspricht, erstrecken sich die Aeste jeweils derselben Diffusionscurve in Fig. 14 a gegen Alkohol zu weiter als gegen Schwefelkohlenstoff, in Fig. 15 a gegen Salzsäure zu weiter als gegen Wasser und in Fig. 16 a nahe gleich weit gegen Ammoniak zu wie gegen Wasser; ein Beweis dafür dass im ersten Falle die raschere Diffusion nach Alkohol, im zweiten nach Salzsäure, und im dritten Falle annähernd gleich rasche Diffusion nach Ammoniak wie Wasser erfolgt.

Während nun die Schnelligkeit, mit der sich die Diffusionscurven ändern, die mittlere Diffusionsgeschwindigkeit erkennen lässt, verräth die Form und gegenseitige Lage derselben, ob in einer Richtung und in welcher die Geschwindigkeit der Diffusion überwiegt. Die Diffusionscurven entwerfen also ein getreues Bild des ganzen Diffusionsvorganges.

Eine quantitative Bestätigung erfahren die obigen Schlüsse durch die graphischen Bestimmungen der Diffusionsconstanten k (cm^2 / Tag) für verschiedene Concentrationen u (Gewicht des gelösten Körpers in g in 100 cm^3 der Lösung), welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind.

Die Genauigkeit der Bestimmungen ist natürlich bei den aus freier Hand nachgezeichneten Curven gering. Bei $NaCl$ wurde bei den grossen Unterschieden in der Concentration bei Versuch I in Uebereinstimmung mit dem Bild der Diffusionscurven und mit den Beobachtungen von Scheffer eine mit der Verdünnung wachsende Diffusionsgeschwindigkeit gefunden. Auffallend ist bei Ammonikwasser das verhältnissmässig starke Ueberwiegen der Diffusionsgeschwindigkeit in der Richtung nach ersterem. Indess zeigt das Curvenbild eine Andeutung in diesem Sinne, wenn auch nur schwach. Die Unterschiede von k mit der Concentration wurden meist grösser gefunden als von Scheffer, zum Theil vielleicht in Folge der Fehler, zum Theil aber wohl auch, weil bei vorliegenden Beobachtun-

gen nicht verschieden concentrirte Lösungen gegen Wasser sondern gegen einander diffundiren. Wo Scheffer[1]) ausnahmsweise den letzteren Vorgang untersuchte, fand er auch grössere Abweichungen.

	τ^0 C.	u	k		τ^0 C.	u	k
Na Cl I	17,2	5 23	1,1 0,8	H Cl II[2])	16,5	3 26	2,8 4,2
NH_3 I	16,9	4 21	1,2 1,6	$AgNO_3$	17,8	4 113	1,1 0,5
NH_3 II	17,1	5 20	1,4 1,9	Na Cl II (photogr. Curven)	16,6	0,2 12,6	1,13 1,16
H Cl I[2])	17,8	1 26	2,9 4,2				

Das graphische Verfahren scheint leider mehr geometrisches Interesse als Genauigkeit zu besitzen. Indessen ist wahrscheinlich, dass es zu einem viel genaueren ausgearbeitet werden kann, wenn photographirte Curven genau ausgemessen und die Neigung der Tangenten der Curven für eine geeignete Abscisse öfters durch eine passende Messvorrichtung bestimmt werden.

Eine grössere Genauigkeit wird von vornherein durch eine auf die Lösung der Differentialgleichung der Diffusion gegründete Methode an die Hand gegeben.

§ 10. Bestimmung der Diffusionsconstanten aus der Lösung der Differentialgleichung für Diffusion.

Ersetzt man in der Differentialgleichung der Diffusion die Concentration durch den ihr zukommenden Brechungsexponenten (vgl. p. 132), so erhält man:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k \frac{\partial^2 n}{\partial x^2},$$

unter der zunächst festzuhaltenden Bedingung, dass k eine auch von n unabhängige Constante ist.[3])

1) Scheffer l. c. p. 398 Anm. 1.

2) Wegen der starken Aenderung von k mit der Concentration wurde hier noch das Glied $k\,(\partial u / \partial x)^2$ der verallgemeinerten Differentialgleichung (Form. 8 p. 143) bei der Rechnung berücksichtigt.

3) Der Einfluss der Veränderlichkeit von k auf die Berechnung des *Mittelwerthes* dieser Grösse wird im nächsten § besprochen und sich dabei für das hier eingeschlagene Verfahren als klein herausstellen.

Wählt man als Nullpunkt der x die ursprüngliche Grenze der übereinandergeschichteten Flüssigkeiten, so sind die Grenzbedingungen für $t = 0$:

$$n = n_1, \text{ für alle Werthe von } x < 0$$
$$n = n_2, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad x > 0$$

Das Integral der Differentialgleichung ist dann:

$$n = n_2 - \frac{n_2 - n_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{+x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Für $t = 0$ und $x > 0$ wird der Werth des Integrals Null; für $t = 0$ und $x < 0$ wird er $\sqrt{\pi}$. Daher sind die Grenzbedingungen erfüllt; dass der Differentialgleichung genügt wird, erkennt man leicht.

Für das Folgende ist erforderlich der Werth von:

$$n' = \frac{dn}{dx} = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

und:

$$n'' = \frac{d^2 n}{dx^2} = -\frac{n_2 - n_1}{4\sqrt{\pi k^3 t^3}}\, x\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Ersetzt man in der Gleichung für n' das x durch $\eta . y = x$ (p. 123), so erhält man die Gleichung der auf rechtwinkelige Coordinaten bezogenen Diffusionscurven (Fig. 16a). Durch Vergleich der experimentell gefundenen Diffusionscurven mit dieser Gleichung erhält man also mannigfaltige Wege zur Bestimmung von k.

Der einfachste und zuverlässigste ist wohl der unter Benutzung des Maximalwerthes des Gefälles n'. Für das zugehörige x muss also sein $n'' = 0$, d. h. $x = 0$. Dann wird

$$n' = \frac{n_2 - n_1}{2\sqrt{\pi k t}},$$

also:

$$k\, t = \frac{(n_2 - n_1)^2}{4\pi} \frac{1}{n'^2}.$$

Nun war (Form. 2 p. 125):

$$n' = \frac{z}{a . \delta}$$

und (Form. 4a p. 125):

$$n_2 - n_1 = \frac{\eta}{a . \delta} F.$$

Also wird:

$$k\,t = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z^2}. \tag{6}$$

Die Formel würde zur Bestimmung von k ausreichen, wenn man den Zeitpunkt $t = 0$, für den die Flüssigkeiten unvermischt aneinander stossen, kennen würde. Derselbe fällt aber nicht mit dem Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit unter die leichtere zusammen, da hierbei eine kleine Mischung an der Grenze nicht zu vermeiden ist. Das theoretische $t = 0$ wird also vor dem Beginn des Eingiessens der schwereren Flüssigkeit liegen, was sich auch aus den mitzutheilenden Messungen ergibt.

Man wählt also am besten zwei Zeiten t_1 und t_2 mit den zugehörigen Werthen z_1 und z_2; dann ist:

$$k\,t_1 = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z_1^2}; \quad k\,t_2 = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi} \frac{1}{z_2^2},$$

also:

$$k = \frac{\eta^2 F^2}{4\pi (t_2 - t_1)} \; \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1^2 . z_2^2}. \tag{7}$$

Die Bedeutung der Constanten dieser Gleichung ist auf p. 125 und 126 angegeben. Die Diffusionsfläche F lässt sich entweder unmittelbar aus den Curven entnehmen, wie das bei den folgenden Bestimmungen geschah, oder aus dem Unterschied der Brechungsexponenten der unvermischten Flüssigkeiten berechnen (vgl. § 8).

Als Beispiel möge ein Versuch dienen, bei welchem eine Kochsalzlösung (30 g NaCl auf 200, 1 g H_2O) gegen Wasser bei einer mittleren Temperatur von 16,6° C (die grösste Temperaturschwankung betrug 0,5° C.) diffundirte. Die Messungen wurden an den photographirten Diffusionscurven ausgeführt. Die Constanten waren $\eta = 0,738$; $F = 12,58\,\mathrm{cm}^2$. Die maximalen Ablenkungen z wurden für 4 verschiedene Zeiten t' gemessen, welche von dem Augenblick des Beginnes des Eingiessens der Kochsalzlösung an gerechnet in Stunden waren: $t'_1 = 3,450$; $t'_2 = 6,001$; $t'_3 = 10,868$; $t'_4 = 21,529$. Die zugehörigen Werthe von z waren in cm: $z_1 = 6,452$; $z_2 = 4,890$; $z_3 = 3,649$; $z_4 = 2,623$. Daraus ergibt sich nach (Form. 6 p. 140) unter Multiplication der rechten Seite mit 24, weil k in Ein-

heiten (cm^2 / Tag) ausgedrückt ist: $k t_1 = 3{,}955$; $k t_2 = 6{,}884$; $k t_3 = 12{,}363$; $k t_4 = 23{,}927$ also:

$$k(t_2 - t_1) = 2{,}929\,; \quad k(t_3 - t_2) = 5{,}479; \quad k(t_4 - t_3) = 11{,}564;$$
$$k(t_4 - t_1) = 19{,}972.$$

Unter Benutzung der t', deren Differenzen gleich denjenigen der t mit gleichem Index sind, erhält man 4 Werthe für k (cm^2 / Tag) nämlich:

$$1{,}15; \quad 1{,}13; \quad 1{,}08; \quad 1{,}10.$$

Nimmt man den letzten Werth, der aus der grössten Zeitdifferenz abgeleitet ist, als Mittelwerth, so erhält man aus den Werthen $k t$ die Zeiten selbst:

$$t_1 = 3{,}595^h; \quad t_2 = 6{,}258^h; \quad t_3 = 11{,}239^h; \quad t_4 = 21{,}752^h.$$

Die Unterschiede $t - t'$ sind dann der Reihe nach in Minuten:

$$9'; \quad 15'; \quad 22'; \quad 13'.$$

Diese Zahlen sollten die gleichen sein; ihr Unterschied ist indess im Vergleich zur Dauer des ganzen Versuches von nahezu einem Tag nicht bedeutend. Es ergibt sich also, dass der theoretische Zeitpunkt 0 des Diffusionsversuches, für welchen Wasser und Salzlösung unvermischt aneinandergrenzen, etwa eine Viertelstunde vor dem Einfüllen der Salzlösung stattfand. Einer solchen anfänglichen Diffusionsdauer ist die beim Einfüllen entstehende Mischung an der Grenze der Flüssigkeiten gleichwerthig.

Es folgt die Zusammenstellung der auf diesem Wege auch aus den gezeichneten Curven erhaltenen Werthe für k. Als Concentration u ist die mittlere, d. h. die Hälfte derjenigen der zum Versuch benutzten Lösung aufgeführt.

	τ °C.	u	k		τ °C.	u	k
$NaCl$ I	17,2	14	1,0	$NaCl$ II (phot. Curven)	16,6	7	1,10
NH_3 I	16,9	13	1,6	Alkohol (98%) – Schwefelkohlenstoff	20,3	—	1,9
NH_3 II	17,1	13	1,7				
HCl I	17,8	14	3,5				
HCl II	16,5	14	3,4	Schwefelkohlenstoff – Chloroform	19,2	—	2,1
$AgNO_3$	17,8	58	0,50				

Die Werthe von k reihen sich in die für kleinste und grösste Concentrationen (p. 138) ziemlich gut ein. Auch stehen

sie mit den nach andern Methoden bisher gewonnenen nicht in Widerspruch. Eine unmittelbare Vergleichung ist schwer, weil die Aenderung von k mit Concentration und Temperatur noch nicht genügend bekannt ist. Zum Vergleich sei nur angeführt, dass für Kochsalz, bei dem die Angaben verschiedener Beobachter ziemlich gut übereinstimmen, Nernst[1]) als Mittel dieser Angaben für verdünnte Lösungen bei 18° C. findet $k = 1{,}10$, das mit dem aus den photographirten Curven gefundenen zufällig genau übereinstimmt, und dass Scheffer[2]), welcher die Diffusion bei sehr wechselnden Concentrationen untersucht hat, bei Salzsäure zwischen 11° und 13° C. bei verschiedenen Concentrationen Werthe findet, die innerhalb 2,0 und 4,2 schwanken. Somit glaube ich auch durch die mitgetheilten, etwas primitiven Versuche gezeigt zu haben, dass die neue Diffusionsmethode brauchbar ist.

§ 11. Einfluss der Veränderlichkeit des Diffusionscoefficienten mit der Concentration auf die Berechnung der mittleren Diffusionsconstanten. — Die verallgemeinerte Differentialgleichung der Diffusion.

Die Benutzung des Integrals der Differentialgleichung der Diffusion setzt die Unabhängigkeit der Diffusionsconstanten k von der Concentration voraus. Da diese Unabhängigkeit nicht besteht und daher nur den Namen eines Diffusionscoefficienten verdient, so fragt es sich, welchen Fehler man begeht, wenn man zur Bestimmung von k für die beim maximalen Concentrationsgefälle herrschende Concentration gleichwohl jenes Integral benutzt.

Dazu ist die Aufstellung einer allgemeineren Differentialgleichung der Diffusion erforderlich, welche die Constanz von k nicht mehr voraussetzt.[3])

Es ströme durch den Querschnitt 1 an der Stelle x des

---

1) Nernst, Zeitschr. für phys. Chemie. **2.** p. 629. 1888.

2) Scheffer, Ebd. p. 398.

3) Nachträglich bemerkte ich, durch Hrn. Drecker aufmerksam gemacht, dass Hr. O. Wiedeburg in Wied. Ann. **41.** p. 675. 1890, die verallgemeinerte Differentialgleichung der Diffusion bereits aufgestellt und eine näherungsweise Lösung derselben gegeben hat. Indess glaubte ich bei der etwas abweichenden Form der Darstellung die folgende Ableitung nicht streichen zu sollen.

Diffusionsgefässes in Richtung nach kleineren x in der Zeit 1 die Menge des Salzes:

$$m_x = k\frac{\partial u}{\partial x},$$

an der Stelle $x + dx$:

$$m_{(x+dx)} = k\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}dx.$$

Dadurch tritt in einem Prisma vom Querschnitt 1 und der Höhe dx eine Vermehrung der Concentration Δu ein:

$$\Delta u = \frac{m_{(x+dx)} - m_x}{dx} = \frac{\partial\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x},$$

und zwar in der Zeiteinheit; in der Zeit dt tritt also die Vermehrung $du = \Delta u\,dt$ ein d. h.:

$$du = \frac{\partial\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}dt,$$

oder:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right);$$

differentiirt man aus, so erhält man als allgemeine Differentialgleichung der Diffusion:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nimmt man den einfachen Fall, dass k sich mit u proportional ändert und sind k_0 und $\varkappa$ zwei neue Constanten, so kann man setzen:

$$k = k_0 + \varkappa u.$$

Die Diffusionsgleichung geht dann über in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

oder in:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{8}$$

Ersetzt man wieder die Concentration durch den Brechungsexponenten, so wird:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \varkappa\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2, \text{ wobei:}$$

$$k = k_0 + \varkappa(n - n_0).$$

Bei der einfachen Diffusionsgleichung fallen nun die Punkte, für welche das Gefälle ein maximales ist, d. h. $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$, mit denjenigen, für welche n sich nicht mit der Zeit ändert, d. h. $\partial n / \partial t = 0$, zusammen. Im allgemeineren Fall trifft das nicht mehr zu; denn für $\partial n / \partial t = 0$ wird:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{\varkappa}{k}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2.$$

Man wird also ein Urtheil erhalten über die Grösse des dadurch begangenen Fehlers, dass man das Integral der einfachen Diffusionsgleichung auch für den Fall veränderlicher k benutzt, wenn man das eine Mal, so wie es oben geschah, Werthe von z einsetzt für Punkte, für welche $\partial^2 n / \partial x^2 = 0$ ist, das andere Mal aber solche für Punkte, für die $\partial n / \partial t = 0$ ist.

Für die Diffusion von Salzsäure gegen Wasser, bei der eine grosse Veränderlichkeit von k mit der Concentration besteht, erhielt ich so im ersten Fall $k = 3{,}36$; im zweiten $k = 3{,}34$. Der Unterschied ist also klein und fällt innerhalb der Fehlergrenzen der mitgetheilten Versuche. Will man grössere Genauigkeit erreichen, so muss man entweder die Correctionsgrösse berechnen oder, was auch aus andern Gründen vorzuziehen ist, mit kleineren Concentrationsdifferenzen arbeiten.

§ 12. Ueber die Vervollkommnung der Methode.

Die mitgetheilten Versuche hatten nur den Zweck einen gangbaren Weg einer optischen Diffusionsmethode zu zeigen.

Behufs grösserer Genauigkeit wird man vor allem für vollkommen planparallele Verschlussplatten der Diffusionsgefässe zu sorgen haben, welche mir nicht zur Verfügung gestanden hatten.

Demnächst wird man bei der zuletzt beschriebenen Methode der Maximalablenkungen, welche die genauesten Ergebnisse verspricht, diese wohl am besten unmittelbar durch eine mit Fadenkreuz versehene Lupe messen, welche auf die Diffusionscurve eingestellt wird und eine genau messbare Verticalverschiebung gestattet.

Mit solchen Versuchen ist bereits im hiesigen physikalischen Institut Hr. Dr. Drecker beschäftigt, welcher sich die Aufgabe gestellt hat, die Methode für feinere Messungen auszuarbeiten. Es ist ihm u. a. schon gelungen, aus fünf Diffusions-

curven bei Kochsalz vier untereinander bis auf ein pro Mille übereinstimmende Werthe abzuleiten.

Es wird ferner gut sein nur Lösungen von kleiner Concentrationsdifferenz gegen einander diffundiren zu lassen, damit der Fehler abnimmt oder verschwindet, welcher dadurch bedingt ist, dass man die Aenderung der Brechungsexponenten proportional derjenigen der Concentrationen setzt. So kann man auch die Abhängigkeit der Diffusion von der Concentration untersuchen. Gleichwohl wird die genaue Kenntniss der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Concentration erwünscht sein.

Man könnte hier befürchten, dass bei Verringerung der Concentrationsdifferenzen der Unterschied im Brechungsvermögen der Flüssigkeiten zu kleine Ablenkungen bedingen wird. Indess hat die Methode nach dieser Richtung fast keine Grenzen, da die Ablenkung $z = a \delta n'$ ist. Bei kleinem n' braucht man nur den Abstand a des Schirmes vom Diffusionsgefäss und die Dicke δ des letzteren entsprechend gross zu wählen. So erhielt ich bei dem geringen Unterschied des Brechungsexponenten der Ammoniaklösung gegen Wasser von ca. 0,01 für $a = 150$ cm und $\delta = 2{,}5$ cm als maximale Ablenkung $z = 7{,}6$ cm.

Einen weiteren Beweis für den Umfang der Verwerthbarkeit der Methode liefert die folgende Anwendung auf die Bestimmung der Wärmeleitung.

Als Vorzug der Methode mag noch erwähnt werden, dass sie meist eine Bestimmung in wenigen Stunden auszuführen gestattet und eine Analyse überflüssig macht. Ich hoffe daher, dass sie für weitere Untersuchungen der Diffusion insbesondere für die Zwecke der physikalischen Chemie ein brauchbares Werkzeug sein wird.

§ 13. Bestimmung der Wärmeleitung des Wassers durch Diffusionscurven.

Die Aenderung des Brechungsexponenten des Wassers um etwa 0,0001 bei Aenderung seiner Temperatur um 1° C. genügt, um die beschriebene Diffusionsmethode zur Bestimmung der Wärmeleitung des Wassers verwendbar zu machen.

Die Diffusion der Wärme befolgt ja das gleiche Gesetz wie diejenige der Materie.

Will man die Temperaturen nach den Brechungsexponenten beurtheilen, so setzt man voraus, dass die letzteren sich den ersteren proportional ändern, was nicht genau zutrifft. Berücksichtigt man zunächst diese Abweichung nicht, so findet die Formel (7) p. 140 Anwendung.

Als Diffusionsgefäss diente ein für Plateau'sche Versuche bestimmter Glaskasten von Würfelform mit 20 cm Seite. Durch die grosse Masse des angewandten Wassers wurde der durch Wärmeabgabe nach aussen bedingte Fehler verringert.

Die grösste Schwierigkeit des Versuchs besteht darin das heisse Wasser über das kalte zu schichten, ohne dass zu starke Mischung eintritt. Am besten gelang das folgende Verfahren. Es wurde ein quadratisches Brett, welches den Querschnitt des Gefässes nicht ganz ausfüllte, auf das kalte Wasser gelegt und dann auf die Mitte des Brettes das heisse Wasser vorsichtig aufgegossen. Dasselbe breitete sich nach allen Seiten aus und floss an den Rändern des Brettes auf das kalte Wasser hinab.

Die Anfangstemperaturen des kalten und heissen Wassers betrugen 6,5° und 53,2°, der Abstand des Schirmes von der Mitte des Gefässes 441,3 cm. Als die durch das Eingiessen erzeugten Schwankungen der Diffusionscurve aufgehört hatten, betrug die Maximalablenkung $z_1 = 13{,}74$ cm, nach Verlauf von 5 Min. $z_2 = 10{,}85$ cm und nach weiteren 10 Min. $z_3 = 8{,}19$ cm. Die Temperaturen des kalten und heissen Wassers waren dann an dem Boden und der Oberfläche 7,6° und 49,6°.

Die Combination von z_1 und z_2 ergab in (cm²/sec): $k = 0{,}0018$, die von z_2 und z_3: $k = 0{,}0014$, die von z_1 und z_3 : $k = 0{,}0016$. Dieser letztere Mittelwerth bezieht sich auf eine mittlere Temperatur von 29°, wofür die Lorberg'sche Berechnung [1]) der Versuche von Weber ergibt: $k = 0{,}00158$.

Bei genaueren Versuchen wäre vor allem ein Verfahren zu erstreben, kalte und heisse Flüssigkeit ohne jegliche Mischung übereinanderzuschichten. Die Mangelhaftigkeit des beschriebenen Versuches in dieser Richtung verbietet auch die Anwendung der in § 9 (p. 136) aufgestellten Regel über die

---

1) Vgl. Wüllner, Experimentalphysik 3. p. 325. 4. Aufl. 1885.

Beziehung zwischen der Verschiebung des Punktes maximalen Gefälles und der Aenderung des Diffusionscoefficienten mit der Concentration, also hier mit der Temperatur. Gleichwohl erkennt man aus dem Verlauf [1]) der beistehend wiedergegebenen Wärmediffusionscurven eine mit der Temperatur steigende Wärmeleitung, wie das auch aus den bisherigen Versuchen folgt.

Auf alle Fälle ist dieser Versuch geeignet, den Vorgang der Wärmeleitung auch vor grösserem Publikum zu veranschaulichen, indem der Temperaturverlauf im Innern des Wassers und dessen bereits nach wenigen Minuten deutlich erkennbare Veränderung den Temperaturausgleich in sichtbarer Weise vor Augen führt.

Abbildung des Vorganges der Wärmeleitung in Wasser durch die Aenderung der Wärmediffusionscurven bei fortschreitender Diffusion.

Erklärung: Fig. 17 in $^1/_{12}$ nat. Grösse, vgl. die Erklärung zu Fig. 14—16 p. 134.

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= 592{,}6 \\ a &= 441{,}3 \\ \delta &= 20{,}0 \end{aligned}\right\} \text{cm} \quad \lambda = 656\,\mu\mu \quad \left.\begin{aligned} t_2 &= t_1 + 5 \\ t_3 &= t_1 + 15 \end{aligned}\right\} \text{Minuten.}$$

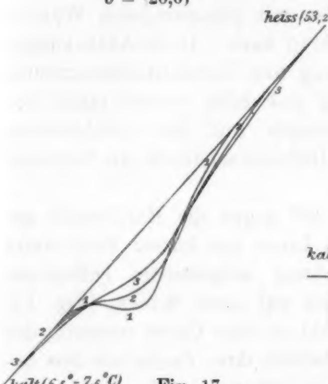


Fig. 17.

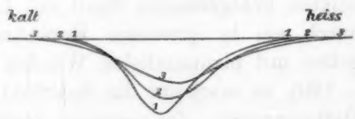


Fig. 17a.

1) Man achte darauf, dass in Fig. 17a sich links die drei Curven nahezu in demselben Punkt schneiden. Trotzdem in diesem für t_1 eine grössere Aenderung des Temperaturgefälles als in dem gleich hohen Punkte der Curve 1 rechts besteht, ändert sich links die Temperatur mit der Zeit langsamer als rechts. — Uebrigens dürfte hier die Inconstanz von $\partial n / \partial \tau$, das die Rolle von $\partial n / \partial u$ bei den Diffusionsversuchen spielt, einen grösseren Einfluss haben. Vgl. Anm. 1 p. 136.

§ 14. **Schluss und Zusammenfassung.**

Hier finde nur noch kurz ein Versuch Erwähnung, bei dem ich die durch Electrolyse in der Nähe der Electroden eintretende Concentrationsänderung durch die Strahlenbrechung verfolgte. Vielleicht lassen sich die obigen Methoden zur Bestimmung der Ueberführungszahlen der Ionen benutzen.

Eingangs vorliegender Abhandlung wurde ein geschichtlicher Ueberblick von theilweise wenig bekannten Untersuchungen über gekrümmte Lichtstrahlen gegeben, unter denen die interessante Broschüre A. Schmidt's „Die Strahlenbrechung auf der Sonne", p. 111, den Anlass zu den mitgetheilten Verruchen gab.

Dieselben bezweckten zunächst stark gekrümmte Bahnen eines Lichtstrahles zu erzeugen und sichtbar zu machen. Man erreicht dies, indem man ein schmales Lichtbündel in die Diffusionsschicht von Schwefelkohlenstoff und fluorescirendem Alkohol sendet (Fig. 3 u. 4, p. 116).

Es zeigt sich also, dass ein Lichtstrahl bei Hindurchtreten durch ein Diffusionsgefäss mit planparallelen Wänden beträchtliche Ablenkungen erfahren kann. Diese Ablenkungen wurden benutzt zur Untersuchung und Constantenbestimmung von Diffusion und Wärmeleitung und dabei vorerst mehr eine Uebersicht über die Erscheinungen und die verschiedenen Möglichkeiten für eine optische Diffusionsmethode als Genauigkeit erstrebt.

Projicirt man einen unter 45° gegen die Horizontale geneigten lichtgebenden Spalt mit Linse von kurzer Brennweite durch ein in grösserer Entfernung aufgestelltes Diffusionsgefäss mit planparallelen Wänden auf einen Schirm (Fig. 11, p. 120), so erscheint das Spaltbild zu einer Curve verzerrt, der *Diffusionscurve. Die verticalen Abstände ihrer Punkte von dem unabgelenkten Spaltbild sind dem Concentrationsgefälle in den zugehörigen Punkten des Diffusionsgefässes proportional* (Formel 2, p. 122) bis auf eine kleine Correction. Die Diffusionscurve bildet so den ganzen Concentrationsverlauf im Diffusionsgefäss ab.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Curve verändert, lässt die Constante der Diffusion berechnen.

Insbesondere empfiehlt sich als einfache und grösserer Genauigkeit fähige Methode die Bestimmung der Diffusionsconstanten aus zwei Maximalabweichungen der Diffusionscurve vom unabgelenkten Spaltbild für zwei Zeiten von zu messendem Zeitunterschied, aus den Brechungsexponenten der unvermischten Diffusionsflüssigkeiten und einigen Längengrössen (Formel 7, p. 140). Hängt die Diffusionsgeschwindigkeit in hohem Maasse von der Concentration ab, so sind als Diffusionsflüssigkeiten solche mit geringem Concentrationsunterschied zu wählen.

Die Diffusionscurve breitet sich nach der Seite rascher aus, nach welcher hin die raschere Diffusion erfolgt, während gleichzeitig ihr Punkt maximaler Ablenkung sich in Richtung kleinerer Diffusionsgeschwindigkeiten verschiebt (Fig. 14—16, p. 134 u. 135).

So bildet sich der ganze Diffusionsvorgang in der allmählichen Veränderung der Diffusionscurven auf dem Schirm naturgetreu ab.

Aachen, Phys. Inst. d. techn. Hochschule, 5. April 1893.

6. *Absolute Messungen über das Ausströmen der Electricität aus Spitzen; von Julius Precht.*

(Mitgetheilt aus dem physikalischen Institut der Universität Bonn.)

(Hierzu Taf. I, Fig. 7—15.)

Wenngleich das allgemeine Verhalten der Electricität gegen Spitzen seit langem bekannt ist, so hat man doch von der *Grösse* der Spitzenwirkung bisher nur sehr unvollkommene Vorstellungen gewonnen, obschon erwartet werden darf, dass absolute Messungen über diesen Gegenstand für die *Theorie der Blitzableiter* nicht ohne Bedeutung sein werden.

Naturgemäss bieten sich hier der Untersuchung verschiedene Fragen dar. Einmal kann es sich darum handeln, die Spannung zu bestimmen, bei welcher das Ausströmen der Electricität aus Spitzen *beginnt*. Ferner ist zu untersuchen, bei welcher Spannung ein schon vorhandenes Ausströmen *aufhört*; und endlich sind Messungen der ausströmenden Electricitätsmengen und der Beziehung zwischen diesen und den herrschenden Potentialen auszuführen. Von den hier gestellten Aufgaben behandelt die vorliegende Arbeit [1]) insbesondere die erste; doch ist auch eine Anzahl von Messungen mitgetheilt, die sich auf die übrigen Fragen beziehen und diese wenigstens theilweise erledigen.

I. Das Anfangspotential.

Dass die entladende Wirkung der Spitzen gewöhnlich überschätzt wird, hat schon Dvořák [2]) auf Grund einer beiläufigen Beobachtung hervorgehoben. Eine sehr feine Nadelspitze, die selbst bei zweihundertfacher Vergrösserung fast ganz scharf erschien, konnte einem geladenen Electroskop bis auf $^1/_{20}$ mm genähert werden, ohne dasselbe zu entladen.

Als ein interessantes Ergebniss meiner Versuche will ich

1) Die Arbeit ist die Bearbeitung einer Inauguraldissertation. Ein Theil derselben bildete die Lösung einer von der philosophischen Facultät der Universität Bonn gestellten Preisfrage.

2) Dvořák, Wied. Ann. **19.** p. 323. 1883.

schon hier hervorheben, dass die schärfste der bisher untersuchten Spitzen (ein unter dem Mikroskop geätzter Silberdraht von 0,05 mm Durchmesser) bis zu einem Potential von rund 2500 Volt geladen werden konnte, bevor Ausströmen eintrat. Für eine gewöhnliche Blitzableiterspitze begann das Ausströmen der Electricität erst bei einem Potential von 15 000 Volt.

Versuchsmethode.

Ausser einer Methode zur bequemen und sicheren Potentialmessung in einem grossen Bereich musste eine Anordnung gefunden werden, die den Beginn des Ausströmens der Electricität aus der zu untersuchenden Spitze mit Sicherheit erkennen lässt. Unter den mannigfachen Vorrichtungen, die für diesen Zweck verwendbar schienen, wurde folgende im Princip hier zu skizzirende electroskopische als die bequemste ausgewählt. Ihre Brauchbarkeit hat sich später durch Vergleichung mit mehreren anderen Methoden gut bewährt.

Ein Leiter *a* (vgl. Taf. I, Fig. 7), der an einem Ende die Spitze trug, war am anderen mit einem Electroskop versehen und wurde mit dem letzteren in eine leitende Hohlkugel *K* isolirt eingeführt. Irgend ein Punkt von *a*, z. B. 1, stand ausserdem durch den sehr grossen Widerstand *W* mit der Kugel in directer leitender Verbindung bei 2. Wird *K* durch eine Electricitätsquelle geladen, so hat bei langsamer Zufuhr der Electricität der Punkt 1 immer dasselbe Potential wie der Punkt 2. Wenn infolge Ausströmens aus der Spitze die Spannung von *a* plötzlich erniedrigt wird, so vermag über *W* die Electricität nicht schnell genug nachzufliessen, um den Verlust auszugleichen, und die entstehende Potentialdifferenz reicht hin, einen Ausschlag des Electroskops zu veranlassen.

Bevor ich auf die praktische Ausführung eingehe, will ich über die Methode der Potentialmessung einiges vorausschicken. Es wurden eine Reihe von Vorversuchen angestellt. Electroskope mit schweren Stanniolblättern erwiesen sich als zu empfindlich. Auf die weitere Umgestaltung eines abgeänderten Righi'schen Electrometers [1]), dass für hohe Potentiale mehrfach mit Vortheil benutzt worden ist, wurde darum verzichtet,

---

1) Quincke, Wied. Ann. 19. p. 569. 1883.

weil es nicht möglich war, das angestrebte Ziel, Vermeidung der Spiegelablesung, zu erreichen. Auch lässt dieses Instrument, wenn es in einem grossen Intervall brauchbar sein soll, immerhin nur eine mässige Genauigkeit zu. Aus diesen Gründen sind die Messungen mit einem gewöhnlichen Quadrantelectrometer ausgeführt, dessen eines Quadrantenpaar mit einer Metallscheibe in Verbindung stand, die durch Influenz von einer in variablem Abstande aufstellbaren Kugel geladen werden konnte. Das Potential dieser Kugel war mit dem zu messenden identisch.

Nach dem Bisherigen wird die gewählte Versuchsanordnung aus der schematischen Figur 8 leicht ersichtlich sein. Die Leidener Flasche L kann durch eine Influenzmaschine von d aus über R geladen werden. Sie trägt die messingne Hohlkugel K, in die durch Siegellack isolirt ein starker Messingdraht a eingefügt ist. Dieser, an seinem oberen Ende mit einer Hülse zum Einsetzen von Spitzen versehen, bildet am unteren Ende in der Hohlkugel den Träger eines kleinen Aluminiumblattelectroskops. W ist der oben erwähnte Widerstand (Fig. 7), und R ist ebenfalls ein Widerstand, der den Zweck hat, die Ladung der Flasche von der Maschine aus hinreichend langsam zu gestalten. Der die Spitze tragende Draht hat bei 1 einen seitlichen, in eine leichte Messingkugel endigenden Ansatz, welcher dem Quadrantelectrometer E und zwar der in der Figur sichtbaren, mit dem einen Quadrantenpaar verbundenen Metallscheibe gegenübersteht. Durch Aenderung des Abstandes von Scheibe und Kugel liess sich die Empfindlichkeit des Electrometers auf die einfachste Weise in sehr weiten Grenzen variiren. Zwei grosse Zinkcylinder, α und β, dienen dazu, das Electrometer vor der Einwirkung anderer Ladungen als der zu messenden nach Möglichkeit zu schützen. Aus demselben Grunde und um die Umgebung der zu untersuchenden Spitze möglichst unverändert zu erhalten, wurde die Influenzmaschine (eine kleine, durch einen Wassermotor betriebene Voss-Maschine von 26 cm Scheibendurchmesser) in 3 m Abstand von der Leidener Flasche aufgestellt. Ein grosser, an zwei langen Seidenfäden aufgehängter Messingconductor d besorgte von dort aus die Verbindung mit der Flasche.

Die Herstellung geeigneter Widerstände R und W bot

ziemlich bedeutende Schwierigkeiten. *W* muss so abgeglichen sein, dass das Electroskop in Ruhe bleibt bis zum Beginn des Ausströmens, und *R* muss hinreichend gross gewählt werden, damit der Ausschlag des Electrometers langsam und stetig wächst. Ohne die vielen vergeblichen Versuche zu erwähnen, beschränke ich mich darauf, die endgültige Form der benutzten Widerstände kurz zu beschreiben. *W* bestand aus einem in ein gebogenes Glasrohr eingezogenen Baumwollband. Nachdem das Band durch Anhauchen den richtigen Feuchtigkeitsgehalt bekommen, wurde das Glasrohr vollständig verschlossen, sodass an beiden Enden nur noch kurze Kupferdrähte, an denen das Band befestigt war, herausragten. Diese Drähte dienten zur Herstellung der leitenden Verbindung an den Punkten 1 und 2. Der Widerstand, der übrigens in Wirklichkeit sich in einer zur Ebene der Zeichnung senkrechten Ebene befand, blieb für die ganze Dauer der Versuche brauchbar.

Für den Widerstand *R* erwies sich Glas als ein sehr zweckmässiges Material. Ueber den langen Messingconductor *d* wurden zwei weite Glasröhren geschoben, die aussen bis auf ihre mit Stanniol belegten Enden ganz mit Schellack überzogen waren.

Die Beobachtung von Electrometer und Electroskop geschah durch Fernrohre, deren Oculare dicht nebeneinander standen. Der Abstand der Scala vom Spiegel des Electrometers betrug 1,7 m. Eine horizontale Durchbohrung der Hohlkugel *K* machte die Beobachtung des Electroskops möglich. Die Oeffnungen wurden von innen mit feinem Drahtnetz verschlossen. Hier wie bei der ganzen übrigen Zusammenstellung der Apparate musste darauf Bedacht genommen werden, alle scharfen Kanten und Spitzen sorgfältig zu vermeiden, was ja durch die Natur der Versuche von vornherein geboten erschien. Die eine Electrode der Maschine, die äussere Belegung der Leidener Flasche, die beiden Zinkcylinder α und β und das eine Quadrantenpaar des Electrometers waren beständig gemeinsam zur Erde abgeleitet. Innere Flaschenbelegung und das mit der Scheibe verbundene Quadrantenpaar konnten vom Sitze des Beobachters aus ad libitum abgeleitet oder isolirt werden.

Der Verlauf eines Versuches ist folgender:

Nachdem alles zur Erde abgeleitet und die Maschine durch den Motor in gleichmässige Rotation versetzt ist, wird erst die Erdverbindung des Electrometers, dann die der inneren Belegung der Flasche aufgehoben. Das Electrometer beginnt langsam und gleichmässig aus der Ruhelage auszuweichen. Das Electroskop verharrt zunächst in Ruhe. Sobald es ausschlägt, beobachtet man den Stand des Electrometers. Die Wiederherstellung der Erdverbindungen und das Abstellen des Motors beendigen den Versuch.

Zur Reduction der Electrometerangaben auf absolutes Maass wurde der eine Pol einer Wasserbatterie von dreihundert Kupferzinkelementen bei Ableitung des anderen Pols mit der der Scheibe des Electrometers gegenüberstehenden Kugel verbunden. Je nach der Entfernung der Kugel von der Scheibe variirte der Ausschlag des Electrometers zwischen 4 und 10 Scalentheilen, von welchen der zehnte Theil noch sicher zu beobachten war. Die Hälfte dieses Ausschlages entsprach der Potentialdifferenz der Batteriepole, die wiederholt bestimmt wurde und im Mittel 250 Volt betrug. Diese Bestimmung geschah durch Vergleichung der Elemente in Gruppen von je zweien mit einem Normaldaniell[1]), später mit Normalclarkelementen.

Fehlerquellen und Controllmethoden.

Die Ausschläge des Electrometers waren dem Potential proportional, wie durch directe Verbindung des einen Quadrantenpaares mit Daniellelementen bis zum grössten beobachtbaren Ausschlag nachgewiesen wurde. Obgleich kaum ein Zweifel aufkommen kann, dass für die aus der Entfernung wirkende Kraft, Influenz der Kugel auf die Scheibe, dieselbe Beziehung besteht, wurden doch die Angaben des Electrometers durch Funkenpotentiale verglichen. Nachdem der Widerstand W durch einen dicken Kupferbügel kurz geschlossen war, wurde das sonst die Spitze tragende Ende des Drahtes a mit der einen Kugel eines Funkenmikrometers verbunden, dessen andere Kugel zur Erde abgeleitet war. Der

1) Wiedemann u. Ebert, Physik. Praktikum, Braunschweig 1890. p. 860.

Durchmesser der Kugeln betrug 20 mm. Die folgende Tabelle enthält in der ersten Columne die Funkenlängen, in der zweiten die diesen entsprechenden Potentiale in absoluten electrostatischen Einheiten, nach der beschriebenen Methode mit Electrometer und Wasserbatterie bestimmt, und die folgenden Columnen geben die Funkenpotentiale anderer Beobachter.

Tabelle I.

Funkenlänge	C. G. S. electrost.	Baille [1])	Quincke [2])	Freyberg [3])
0,2 mm	4,50	4,70		
0,4 „	7,59	7,52		
0,6 „	10,39	9,97		
0,8 „	12,55	12,45		
1,0 „	14,95	14,68	14,8	15,2
1,2 „	17,17	16,87		
1,4 „	19,59	19,03		
1,6 „	21,64	21,22		
1,8 „	23,84	23,43		
2,0 „	25,46	25,51		

Die Uebereinstimmung in den Resultaten ist eine so gute zu nennen, als sie nach den Abweichungen in den Funkenpotentialbestimmungen verschiedener Beobachter nur zu erwarten war. Daher kann die Brauchbarkeit der benutzten Messmethode wohl als erwiesen betrachtet werden.

Um den Nachweis zu führen, dass der Ausschlag des Electroskops in der That den Beginn des Ausströmens von Electricität aus der zu untersuchenden Spitze anzeigt, sind eine Reihe von Versuchen angestellt: Messungen mit der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten ausgeführt, ergeben gleichartige Resultate; bei stumpfen Spitzen erfolgt der Ausschlag des Electroskops später als bei scharfen; wird statt der Spitze eine Kugel aufgesetzt, so erhält man keinen Ausschlag, auch wenn die Spannung bis über die Grenzen der Messbarkeit mit dem Electrometer steigt; bei im übrigen gleichen Versuchsbedingungen ist die Zeit bis zum Ausschlag des Electroskops annähernd gleich der Zeit, nach der im Dunkeln das

1) **Baille**, Ann. de Chim. et de Phys. **29.** p. 181. 1883.
2) **Quincke**, Wied. Ann. **19.** p. 569. 1883.
3) **Freyberg**, Wied. Ann. **38.** p. 254. 1889.

Aufleuchten des an der Spitze entstehenden Büschels wahrgenommen wird. Aendert man diese Zeitdauer, vom Beginn der Ladung an gerechnet, indem man die Zufuhr der Electricität beschleunigt oder verlangsamt, so findet sich bei Anwendung derselben Spitze die Spannung immer von gleicher Grössenordnung. Die Aenderung der Zufuhr geschah durch eine an der einen Maschinenelectrode befestigte Spitze, welche der anderen Electrode mehr oder weniger genähert werden konnte, sodass über diese Entladungsstrecke ein grösserer oder geringerer Theil der erzeugten Electricität direct zur Erde abgeleitet wurde. Naturgemäss sind bei sehr schneller Ladung die Beobachtungsfehler an der Electrometerscala beträchtlich, während bei sehr langsamer Ladung die Bewegung des Electroskops weniger leicht zu erkennen ist. Denn obschon sich immer ein bestimmter Zeitpunkt angeben lässt, indem das Aluminiumblättchen zu divergiren anfängt, so erfolgt doch die Bewegung streng genommen nicht in der Art, dass sofort ein grosser Ausschlag eintritt; sie beginnt vielmehr langsam, um dann erst plötzlich schnell zu wachsen.

Aus den mitgetheilten Versuchen lässt sich mit Sicherheit der Schluss ziehen, dass das Electroskop das Ausströmen von Electricität aus Spitzen, die auf den Draht *a* aufgesetzt sind, anzeigt; nur wäre noch die Frage aufzuwerfen, ob seine Bewegung auch wirklich den *Beginn* des Ausströmens bezeichnet. Das Entstehen eines Ausschlages ist dadurch bedingt, dass die Spannung im Punkte 1 (vgl. Taf. I, Fig. 8) um einen gewissen endlichen Werth unter die Spannung im Punkte 2 sinkt. Wenn nun das Ausströmen sehr langsam und mit geringer Intensität beginnt — besonders bei sehr scharfen Spitzen ist das wahrscheinlich —, sodass die zwischen 1 und 2 hervorgerufene Potentialdifferenz unter diesem Werthe bleibt, so erfolgt kein Ausschlag, das Ausströmen bleibt unbemerkt. Es war also nothwendig, die Empfindlichkeit des Electroskops festzustellen. Zu dem Zwecke wurden die Stellen 1 und 2 mit einer kleinen Batterie von Kupferzinkelementen verbunden. Das Electroskop reagirt dann auf einen plötzlichen Wechsel der Pole, und die Anzahl der Elemente wurde solange vermindert, bis der Polwechsel noch eben einen wahrnehmbaren Ausschlag des Electroskops veranlasste. Auf diese Weise fand sich, dass

Aenderungen der Spannung, die weniger als 17 Volt betragen, am Electroskop nicht bemerkt werden können. Um mindestens diesen Betrag muss demnach die Spannung im Punkte 1 durch das Ausströmen erniedrigt werden, damit es constatirt werden kann. Nun ist sehr wohl möglich, und nach den Versuchen besonders bei scharfen Spitzen wahrscheinlich, dass das erste Ausströmen eine viel weniger grosse Spannungserniedrigung zur Folge hat. In diesem Falle würde es unbemerkt bleiben, und darin besteht der Mangel der Methode.

Daher sind ausser der electroskopischen noch mehrere andere Methoden, den Beginn des Ausströmens zu markiren, untersucht und mit dieser verglichen. Die im Princip einfachste Controlle besteht darin, dass man im Dunkeln das Aufleuchten des Büschels an der Spitze beobachtet. Da sich herausstellte, dass das Auffinden des Büschels mit dem Fernrohr im Dunkeln schwierig war, so wurden die Versuche in der Weise ausgeführt, dass ein Beobachter in nächster Nähe der Spitze das Auftreten des Büschels constatirte, während ein anderer in diesem Augenblick das Electrometer ablas, nachdem er zuvor die Scala desselben plötzlich beleuchtet hatte. Der letztere konnte dann auch noch das gleichzeitig beleuchtete Electroskop beobachten. Hr. Dr. Lenard hatte die Freundlichkeit, die Beobachtung von Electrometerscala und Electroskop zu übernehmen.[1]) Die plötzliche Beleuchtung geschah durch Glühlampen. Es ergab sich, dass der Büschel stets etwas eher auftrat als der Ausschlag des Electroskops; dieses befand sich noch in Ruhe, begann aber alsbald seine Bewegung. Der Unterschied war nicht so gross, dass die Stellung des Electrometers in der Zwischenzeit sich sehr merklich verändert hätte. Die Uebereinstimmung im wesentlichen bestätigt also die Brauchbarkeit des Electroskops, abgesehen davon, dass seine Anwendung frei ist von den vielen handgreiflichen Uebelständen, welche die Beobachtung des Büschels mit sich bringt.

Zum Theil ähnliche Mängel haften auch der folgenden Methode an, die indessen zu einigen sehr interessanten Be-

1) Auch an dieser Stelle möchte ich Hrn. Dr. Lenard für die stets bereitwillige Unterstützung meiner Versuche meinen Dank aussprechen.

obachtungen führte. Es ist bekannt, dass ausströmende Electricität in einem Dampfstrahl zur Bildung von Condensationskernen Anlass gibt, die sich durch ein Dichterwerden des Strahles und eine Aenderung seiner Farbe sehr deutlich bemerkbar macht.[1]) Die Reaction ist mit Vortheil für den vorliegenden Zweck zu verwenden. Der Dampfstrahl entströmte einem Glasrohr, das 10 cm über der Spitze und etwa 3 cm seitlich davon endete. Um jeden Einfluss von Flammengasen auf den Strahl und die Spitze auszuschliessen, wurde der Dampfkessel ausserhalb des Zimmers aufgestellt. Für eine stumpfe Spitze ergaben die Versuche völlige Uebereinstimmung zwischen der Dampfstrahlreaction und dem beginnenden Electroskopausschlag. Bei sehr scharfen Spitzen fand sich die interessante Erscheinung, dass der dauernden Aenderung des Dampfstrahles, welcher der Ausschlag des Electroskops sehr kurz nachfolgte, eine Anzahl momentaner Reactionen im Strahl voraufgingen. Vor dem beständigen Ausströmen der Electricität erfolgte also eine Reihe kleiner stossweiser Entladungen. In einem besonderen Falle wurde festgestellt, dass das erste momentane Auftreten der Reaction bei einer Spannung von 2400 Volt, die dauernde Veränderung des Strahles dagegen bei 3700 Volt Spannung eintrat.

Unter *Entladungs-* oder *Anfangspotential* soll im Folgenden immer die Spannung verstanden werden, welche den Beginn des *continuirlichen* Ausströmens bezeichnet.

Obgleich auch das Electroskop bei *sehr scharfen* Spitzen durch kleine Zuckungen die Stösse anzeigt, so erscheint doch diese Definition durch die Thatsachen allein gerechtfertigt, denn bei stumpfen Spitzen waren Schwankungen infolge stossweisen Ausströmens nicht zu bemerken. — Im übrigen liefert die allgemeine Uebereinstimmung der Dampfstrahlreaction mit dem Electroskopausschlag eine weitere gute Bestätigung der Methode. Die Nachtheile der Anwendung des Dampfstrahles, Aenderung der Zimmerluft und Anwesenheit eines Leiters in der Nachbarschaft der Spitze entscheiden zu Gunsten des Electroskops; denn sucht man sie zu vermeiden, so ist immer das Electroskop empfindlicher.

1) R. v. Helmholtz, Wied. Ann. **32**. p. 1. 1887.

Eine andere Methode ist durch Benutzung des Rückstosses gegeben, der ein electrisches Flugrädchen bewegt. Statt des Rädchens diente ein kleiner, aus Aluminium hergestellter Wagebalken, der auf der einen Seite eine aufwärts gerichtete Spitze trug. Der Balken wurde auf einer, 1 mm breiten, am Ende des Drahtes *a* befestigten Schneide gut äquilibrirt. Beim Ausströmen von Electricität bewegt sich die Seite mit der Spitze abwärts. Ein Vergleich dieser Reactionswaage mit dem Electroskop ergab, dass die Waage nur wenig empfindlicher war. Auch hier wurden vor dem eigentlichen Ausströmen kleine Schwankungen der Waage beobachtet, die mit geringen Bewegungen des Electroskops gleichzeitig waren.

Endlich ist auch ein Galvanometer zur Controlle des Electroskops gebraucht. Der Draht *a* (Fig. 8), der sonst die Spitzen trug, wurde verlängert und mit der einen Klemme eines durch Siegellackstützen völlig isolirten Galvanometers verbunden. Die andere Klemme wurde mit einem langen, vertical nach oben gerichteten Draht versehen, der in die Spitze frei endigte. Das benutzte Galvanometer war ein du Bois-Reymond'sches Instrument mit 12000 Windungen, für directe Ablesung eingerichtet. Es zeigte sich, dass bei dieser Versuchsanordnung das Galvanometer sehr nahezu die gleiche Empfindlichkeit hatte, wie das Electroskop.

Die gute Uebereinstimmung der verschiedenartigen Methoden beweist, dass der Ausschlag des Electroskops in der That als Kriterium für den Beginn des Ausströmens gelten kann. Zugleich führte die Untersuchung zu dem interessanten Ergebniss, dass dem andauernden Ausströmen besonders bei scharfen Spitzen kleine stossweise Entladungen vorhergehen. Als Entladungspotential wurde die Spannung definirt, die dem Anfang des andauernden Ausströmens entspricht.

Die meisten der im Folgenden zu beschreibenden Versuche sind nach der electroskopischen Methode angestellt.

Resultate.

1. Der Werth des Entladungspotentials ist nicht unabhängig davon, ob kurz zuvor ein Ausströmen von Electricität aus der Spitze stattgefunden hat oder nicht. Zum Beispiel zeigte sich in einer Reihe von 25 sehr schnell hintereinander

ausgeführten Beobachtungen mit negativer Ladung ein beständiges Anwachsen der Spannung bis zur achtzehnten Beobachtung. Diese übertraf die erste um fast 25 Proc. Von da ab blieben die Ausschläge des Electrometers merklich constant. Die Erscheinung hat ihre Ursache zum Theil in der Aenderung der Spitzenoberfläche durch die Entladung, zum Theil in einer Ladung ihrer Umgebung. Der letztere Einfluss liess sich durch eine Pause zwischen den aufeinanderfolgenden Versuchen vermeiden; 3 Minuten waren ausreichend. Alsdann wichen Beobachtungen mit Ladungen von gleichem Zeichen noch in einem Intervall von höchstens drei Scalentheilen untereinander ab. Meist wurden abwechselnd Versuche mit positver und negativer Ladung angestellt. Jeder angegebene Potentialwerth ist das Mittel aus wenigstens vier Beobachtungen.

2. Staub erschwert eigenthümlicherweise das Ausströmen von Electricität. In stark stauberfüllter Luft wurde die Spannung in einem speciellen Falle um 10 Proc. höher gefunden als in staubfreier. Dieser Versuch beweist erstens, dass der Staub schwerlich als die Ursache des Ausströmens angesehen werden kann, zweitens dass, obgleich Staubtheile an der Spitze das Potential wohl ändern können, sie es doch keineswegs der Grössenordnung nach bestimmen. Derselbe Schluss muss schon aus den gleichartigen Resultaten gezogen werden, die man bei der Untersuchung der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten erhält. Ob der Einfluss des Staubes darin besteht, die electrisirte Spitze, von der er ja angezogen wird, dicht zu bedecken und dadurch gleichsam abzustumpfen, oder ob sich eine Wolke gleichnamig geladener Staubtheilchen über der Spitze bildet, blieb unentschieden. (Es scheint nicht überflüssig, zu erwähnen, dass Theilchen von der Grösse der Staubkörnchen von geladenen Oberflächen im allgemeinen nicht fortfliegen, sondern haften.)

3. Flammengase in der Umgebung der Spitze erhöhen das Entladungspotential. Ihr Einfluss wurde zuerst beobachtet, als das Electroskop, statt wie gewöhnlich mit einem Spiegel, durch eine in 2 m Abstand aufgestellte Gasflamme beleuchtet wurde. Die Grösse des dabei auftretenden Unterschiedes ergibt sich aus folgender Tabelle. Zwischen dem zweiten und dritten Versuch wurde das Zimmer längere Zeit gelüftet.

Tabelle II.

	positiv	negativ
	Volt	Volt
Tageslicht	4700	3700
Gasflamme	5800	4500
Tageslicht	4800	3800

Da die grosse Differenz zum Theil auch von der Veränderung des Lichtes herrühren konnte, so wurde der Versuch in der Weise variirt, dass die Luft des Arbeitszimmers durch halbstündiges Brennen von vier Gasflammen mit Verbrennungsgasen geschwängert wurde. Nach dem Löschen der Flammen fand sich nun für das Spitzenpotential bei negativer Ladung der Werth 4400 Volt, während er vor Beginn des Versuches zu 3900 Volt bestimmt war. Durch die Anwesenheit der Verbrennungsgase wird also das Ausströmen bedeutend erschwert. Allerdings darf nicht unerwähnt bleiben, dass das Electroskop vor dem endgültigen Ausschlag vom Beginn der Ladung an kleine zuckende Bewegungen machte, die darauf hindeuten, dass bei dieser Beschaffenheit der Umgebung schon ausserordentlich kleine Electricitätsmengen aus der Spitze entladen wurden. Die negative Electricität fand scheinbar gar keinen Widerstand beim Uebergang in die Gase. Bei positiver Ladung ist der Verlauf ganz analog; der weite Ausschlag des Electroskops erfolgt bei höherer Spannung als der normalen. Die kleinen Bewegungen des Blättchens beginnen dagegen nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit, und sie sind seltener. — Dass Flammengase in hervorragendem Maasse die Eigenschaft haben, die Electricität längere Zeit festzuhalten, ist oft bemerkt worden. In obigen Versuchen war die sehr starke Ladung der Luft noch 40 Minuten lang mit dem Exner'schen Electroskop und einer kleinen Flamme nachweisbar.

Aus allem ergab sich die Nothwendigkeit, die Versuche fortan nur bei Tage anzustellen. Da das Tageslicht durch Fensterscheiben einfiel, so war es zugleich vom grössten Theil der ultravioletten Strahlen befreit.

4. Ultraviolettes Licht hat bekanntlich die Eigenschaft,

die Entladung negativer Electricität zu begünstigen.[1]) Dieser Einfluss übte auch auf das Entladungspotential der Electricität aus Spitzen seine Wirkung. Wurde dieselbe Nadelspitze einmal in vollem nicht durch Glasscheiben filtrirtem Sonnenlicht und dann im Dunkeln bei Glühlichtbeleuchtung von Scala und Elektroskop untersucht, so fand sich die Spannung

bei Sonnenlicht	+ 5380 Volt	– 3680 Volt
im Dunkeln	+ 5330 Volt	– 3860 Volt.

Man erkennt deutlich das leichtere Ausströmen der negativen Electricität unter dem Einflusse des ultravioletten Lichtes. Auf das positive Potential ist keine Einwirkung zu bemerken. Da das Licht der übrigens sehr kleinen Glühlampen ja auch durch Glaskugeln hindurch gehen musste, so lässt sich gegen ihre Verwendung kein Einwand erheben. — Die Versuche wurden später in der Weise wiederholt, dass das Licht von Inductionsfunken, die zwischen Zinkspitzen übergingen und daher an ultravioletten Strahlen reich waren, durch eine Quarzlinse auf die zu untersuchende Spitze concentrirt wurde. War letztere eine amalgamirte Zinkspitze[2]), so betrug die Spannungserniedrigung durch Belichtung bei negativer Ladung im Mittel aus vielen Versuchen 800 Volt = 7 Proc., bei Anwendung einer Platinspitze 500 Volt = 5 Proc. Durch Einschaltung einer Glasscheibe zwischen Quarzlinse und Spitze wurde die Wirkung aufgehoben, ein Beweis, dass in der That ein Einfluss der ultravioletten Strahlen vorlag. Verschiedene Erscheinungen lassen schliessen, dass infolge der Belichtung ausserordentlich kleine Electricitätsmengen schon sehr frühzeitig entladen werden. Eine Aenderung der Spannung beim Beginn des Ausströmens positiver Electricität konnte aus den Beobachtungen nicht gefolgert werden.

5. Leitende Flächen in der Umgebung der Spitze erleichtern das Ausströmen, wie zu erwarten war. Die nächsten Leiter unterhalb der Spitze, vor allem der nur 24 cm entfernte obere Rand des Zinkschirmes β (vgl. Fig. 8), beein-

1) H. Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 983. 1887.
2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **39.** p. 332. 1890.

flussen den Werth der Spannung nicht; denn er blieb derselbe, wenn ein ähnlicher Leiter in entsprechender Stellung auf der anderen Seite der Flasche angebracht wurde. Der Einfluss von Leitern über der Spitze wurde durch ein horizontal befestigtes, zur Erde abgeleitetes Messingdrahtnetz von 25 qcm Fläche untersucht. Bei kleinem Abstand von der Spitze wird die Entladungsspannung erheblich herabgedrückt; die Verminderung nimmt bei wachsendem Abstand anfangs schnell, später sehr langsam ab. Der Verlauf ist derselbe, wenn in das Drahtnetz sehr viele feine Nähnadeln (75) mit der Spitze nach unten eingesetzt werden. Für letzteren Fall enthält die folgende Tabelle die Resultate:

Tabelle III.

Höhe über d. Sp.	positiv	negativ
	Volt	Volt
5 cm	3600	2800
10 „	4000	3100
15 „	4200	3300
20 „	4400	3500
25 „	4500	3600
∞	5000	3800

Die letzte Zeile bezieht sich auf die für alle folgenden Versuche constante Bedingung, dass die Zimmerdecke der nächste Leiter über der Spitze ist. Ihre Entfernung von der Spitze betrug $3^1/_4$ m.

6. Die Uebereinstimmung von Messungen, die mit der gleichen Spitze zu verschiedenen Zeiten angestellt wurden, ist keine sehr gute zu nennen. Die Beobachtungen derselben Versuchsreihe zeigen untereinander Abweichungen bis zu 4 Proc., während der Unterschied der Resultate verschiedener Versuchsreihen bis zu 8 Proc. des Mittels aus allen Beobachtungen betragen kann. Um ein Beispiel zu geben, führe ich die ungünstigsten Ergebnisse an, die mit derselben Spitze an verschiedenen Tagen erhalten wurden. Die Zusammenstellung lässt erkennen, dass die Differenzen unter Umständen noch beträchtlicher sein können.

Tabelle IV.

	positiv	negativ
Januar 28	4190 Volt	3031 Volt
„ 29	4094 „	3004 „
„ 30	4306 „	3273 „
Februar 2	4517 „	3434 „
„ 4	4348 „	3203 „
Mittel	4300 Volt	3200 „

7. Die Ursache dieser verhältnismässig geringen Genauigkeit liegt nicht in der angewandten Methode, sondern muss wesentlich in der Aenderung der Spitze durch die Versuche gefunden werden, zu der ja mannigfache Ursachen zusammenwirken. Oxydation des Metalls durch chemische Einwirkung der Entladung war an einer längere Zeit zwischen den Electroden benutzten Stahlspitze durch einen dicken Oxydüberzug stark erkennbar. Auch die Veränderlichkeit der Menge des vom Metall adsorbirten und occludirten Gases sowie die *Zerstäubung* des Metalls kann beträchtliche Aenderungen der Entladungsspannung bewirken.

8. Versuche über die Zerstäubung des Metalls führten zu einigen recht interessanten Resultaten. Nachdem an einer Nähnadelspitze anderthalb Stunden lang ein positiver Büschel erzeugt war, zeigte sich das Spitzenpotential um rund 500 Volt grösser als vorher. Die Fig. 9 und 10 wurden durch Zeichnung der Nadel unter dem Mikroskop bei fünfhundertfacher Vergrösserung[1]) vor und nach der Zerstäubung erhalten. Man erkennt deutlich, dass eine starke Veränderung stattgefunden hat; infolge der Entladung ist ein bedeutendes Stück der Spitze fortgegangen; am vergrösserten Bilde gemessen war sie nach dem Versuche um 6 mm kürzer als vorher. Die Verdickung an den Seiten scheint eine Folge der Oxydation zu sein. Oft zeigt die zerstäubte Spitze eine kraterförmige Vertiefung (Fig. 11). Auffällig ist, dass der analoge Versuch mit negativem Büschel die Spitze ganz unverändert lässt; sie ist nur sehr dicht mit Staub bedeckt, liefert aber nach dem Abwischen desselben be fünfhundertfacher Vergrösserung genau die gleiche Zeichnung

1) Die Figuren sind nach den Originalen auf etwa ein Viertel verkleinert, ebenso 11 und 12.

wie vor der Entladung. Die Erhöhung des Entladungspotentials nach der Erzeugung eines positiven Büschels an der Spitze kann zum Theil von einer chemischen Veränderung der Oberfläche herrühren, zum Theil wird sie ihren Grund haben in der *Abstumpfung* der Spitze durch die Zerstäubung. Welcher dieser Factoren mehr dabei betheiligt ist, war nicht zweifellos zu entscheiden. Die kleineren Spitzen und scharfen Kanten der kraterförmigen Vertiefungen sollten ein leichteres Ausströmen nach der Zerstäubung vermuthen lassen. Da in Wirklichkeit das Umgekehrte stattfindet, so wäre daraus auf eine chemische Veränderung der Oberfläche zu schliessen, die der Entladung einen grösseren Widerstand bietet. Andererseits zeigte sich, dass so kleine Spitzen, die gleichsam auf einer grösseren wachsen, das Entladungspotential nicht wesentlich bestimmen (vgl. 10). Die zerstäubten Spitzen wären demnach immer als abgestumpft zu betrachten.

9. Dass aber die Electricität aus stumpfen Spitzen schwerer ausströmt als aus scharfen, ist ein ganz allgemeines Ergebniss der Versuche. In der That wird man nichts anderes erwarten. Demgemäss wird das Entladungspotential von Spitzen, die bei Betrachtung mit dem Mikroskop schärfer erscheinen, kleiner gefunden als bei stumpferen. Sehr schön erläutert das die beigegebene Zeichnung (Fig. 12), welche zwölf der untersuchten Spitzen darstellt, die bei hundertfacher Vergrösserung mit Hülfe der Camera lucida gezeichnet wurden. Oben sind die Potentialwerthe bei positiver Ladung eingetragen. Um die Spitzen kurz zu charakterisiren, erwähne ich, dass Nr. 1 ein unter dem Mikroskop geätzter Silberdraht von 0,05 mm Durchmesser ist; Nr. 2—6 sind Nähnadeln verschiedener Handelsnummern (Nr. 2 aus einer sehr feinen Nadel geätzt), 7 und 8 sind Sattlernadeln, 9—12 endlich die Enden von Stricknadeln. Durch Vergleichung ihrer Zeichnungen kann man eine Reihe von Nadeln mit ziemlicher Sicherheit so ordnen, wie es der Aufeinanderfolge der Entladungspotentiale entspricht, auch wenn die Unterschiede weniger bedeutend sind als in der gegebenen Zusammenstellung. — Ueber das Verhalten sehr scharfer Spitzen möge eine kurze Bemerkung hier Platz finden. Schon oben ist erwähnt, dass das Electroskop nur auf ein Ausströmen reagirt, das eine Spannungserniedrigung von gewisser Grösse

zur Folge hat, und ferner, dass bei ganz feinen Spitzen Zuckungen des Electroskops beobachtet wurden. Es wird von Interesse sein, die untere Grenze der Spannung kennen zu lernen, bei der das Zucken auftrat, denn dieses entspricht ja auch einem Ausströmen. Für eine aus Blattaluminium geschnittene Spitze erfolgte das erste Zucken bei + 1871, — 1065 Volt; der definitive Ausschlag wurde erst bei + 4173, — 2971 Volt beobachtet.

10. Nicht die zufällige Beschaffenheit des letzten Elementes der Spitze bestimmt die Spannung beim Ausströmen — das bewies schon der verhältnissmässig kleine Einfluss von Staub —, sondern ihre ganze Configuration. Besonders deutlich wird das aus der folgenden Tabelle, die das Anfangspotential für Stanniolspitzen verschiedenen Spitzenwinkels enthält. Die Spitzen wurden in der durch Fig. 13 dargestellten Form aus gewöhnlichem Stanniol geschnitten. Zum kleineren Spitzenwinkel gehört das kleinere Potential.

Tabelle V.

Winkel	positiv	negativ	Differenz
90°	8 500 Volt	5 900 Volt	2 600 Volt
75°	7 800 „	5 200 „	2 600 „
60°	6 900 „	4 800 „	2 100 „
45°	5 300 „	3 700 „	1 600 „
30°	4 600 „	3 200 „	1 400 „
15°	4 200 „	3 100 „	1 100 „

Bei fünfhundertfacher Vergrösserung erschienen die Spitzen am äussersten Ende sehr ungleich gezackt.

11. Eine einfache Beziehung zwischen der Gestalt der Spitze und der zum Ausströmen erforderlichen Spannung scheint nach dieser Tabelle nicht zu bestehen. Dass überhaupt für stumpfere Spitzen eine grössere Spannung nöthig ist, als für scharfe, bleibt noch zu erklären.

Die einfachste Annahme, die man machen kann, besteht darin, dass man den zu überwindenden Widerstand als constant voraussetzt, einerlei, ob die Entladung aus einer stumpfen oder scharfen Spitze erfolgt. Es ist dann nothwendig, dass die auf verschiedenen Spitzen angehäuften Electricitätsmengen unmittelbar vor dem Durchbrechen des Dielectricums stets die

gleiche Dichtigkeit haben. Da aber die Dichtigkeit bei gleich hohen Potentialen auf der schärferen Spitze die grössere ist, so folgt, dass bei gleicher Dichtigkeit auf der stumpferen Spitze das grössere Potential herrscht, also ist auch das Entladungspotential für die stumpfere Spitze grösser, es strömt schwerer Electricität aus.

12. Es wurde versucht, unter der Annahme constanter Entladungsdichtigkeit das Potential als Function des Krümmungsradius der Spitze darzustellen und die aufgefundene Beziehung durch das Experiment zu bestätigen. Zu dem Zweck wurde die Spitze mit dem Leiter, auf dem sie sich befindet, als ein gestrecktes Rotationsellipsoid aufgefasst. Für das Potential desselben gibt die Theorie die Beziehnung

$$V = \frac{Q}{2e} \log \frac{a+e}{a-e},$$

worin Q die Electricitätsmenge, a die grosse Halbaxe und e die Excentricität des Ellipsoids bezeichnet.[1]) Führt man die Dichtigkeit ε am Endpunkt der grossen Axe ein, die gegeben ist durch

$$\varepsilon = \frac{Q}{4\pi c^2},$$

wo c die kleine Halbaxe bezeichnet und ferner den Krümmungsradius des Ellipsoids

$$\varrho = \frac{c^2}{a},$$

so wird durch Elimination von Q

$$\varepsilon = V \cdot \frac{\sqrt{a^2 - a\varrho}}{2\pi a \varrho} \cdot \frac{1}{\log \dfrac{a + \sqrt{a^2 - a\varrho}}{a - \sqrt{a^2 - a\varrho}}}.$$

Da ϱ sehr klein ist, so ist $a\varrho$ gegen a^2 zu vernachlässigen und man erhält nach einigen Umformungen

$$\varepsilon = \frac{V}{2\pi\varrho \cdot \log \dfrac{4a}{\varrho}}. \tag{1}$$

Ist nun, wie vorausgesetzt, im Moment der Entladung die Dichtigkeit an der Spitze, also ε, constant, so wird für eine andere Spitze

1) Neumann, Das Potential, Leipzig 1887. p. 355.

(2) $$\varepsilon = \frac{V_1}{2\pi\,\varrho_1 \,.\, \log \frac{4\,a_1}{\varrho_1}}$$

oder

(3) $$\frac{V}{\varrho \,.\, \log \frac{4\,a}{\varrho}} = \frac{V_1}{\varrho_1 \,.\, \log \frac{4\,a_1}{\varrho^1}} = \text{const.}$$

Bildet man die Differentialquotienten $dV/d\varrho$ und dV/da, so ergibt sich durch Einsetzen numerischer Werthe für a und ϱ, dass dV/da gegen $dV/d\varrho$ vollständig zu vernachlässigen ist. Somit ist also V nur Function von ϱ, und wir können schreiben

(4) $$\frac{V}{\varrho \,.\, \log \frac{\varkappa}{\varrho}} = \frac{V_1}{\varrho_1 \,.\, \log \frac{\varkappa}{\varrho_1}} = \text{const.},$$

worin $\varkappa$ eine willkürliche Constante bezeichnet. Die Krümmungsradien konnten aus den Zeichnungen der vergrösserten Spitzen gemessen werden. Die aufgestellte Beziehung (4) fand sich indessen durch die Versuche nicht bestätigt, sei es daher, dass die Spitzen doch nur in roher Annäherung Ellipsoide darstellen, sei es, dass die Annahme gleicher Dichtigkeit überhaupt nicht berechtigt ist.[1])

13. Ein Blick auf die bisher mitgetheilten Beobachtungen zeigt, dass der Werth der Spannung bei negativer Ladung der Spitze stets kleiner gefunden wurde als bei positiver. Dennoch ist dies kein allgemeines Resultat, so sehr es auch mit einer Reihe von Erfahrungen übereinstimmen würde, die man seit Belli und Faraday[2]) über die Artunterschiede der Electricität gemacht hat. Es ergaben sich nämlich an zwei Beobachtungstagen für mehrere stumpfe Spitzen grössere negative Werthe, für eine Spitze gleiche positive und negative. Eine das zweite Mal durchgängig mitgeprüfte, im Vergleich mit den übrigen scharfe Spitze gab stets grösseres positives Potential, sodass

---

1) *Anm.:* Hr. Chattock, der vor kurzem eine Untersuchung über die Entladung zwischen einer Spitze und der Innenfläche einer Kugelschale bei mässiger Luftverdünnung angestellt hat [Phil. Mag. (5) **32.** p. 285. 1891], findet das Product $f \,.\, r^{0,8}$ (f = Stärke des electrischen Feldes, r = Krümmungsradius) für ein gewisses Intervall der r constant, doch enthält die gegebene Tabelle auch stark abweichende Werthe.

2) Faraday, Exp. Res. I, § 1520; ferner Series XIII.

der Grund der Abweichungen bisher unaufgeklärt blieb. Bei Anwendung einer Platte über der Spitze war der negative Werth stets kleiner.

Die Frage, ob negative Electricität leichter ausströmt als positive, ist schon mehrfach behandelt, wenn auch nicht in der Form, dass der Beginn der Entladung in Betracht gezogen wurde. Ich gebe unten[1–5]) einige Quellen an, in denen man über diesen Gegenstand etwas findet. Aus der Gesammtheit des Bekannten ergibt sich ein sehr merkwürdiges, wechselndes Verhalten der negativen Electricität, dessen bedingende Umstände nicht aufgeklärt sind. Aus diesem Grunde ist es zwecklos, über seine Ursachen irgend eine Anschauung auszusprechen.

Als ein vorläufiges Ergebniss leitet Hr. Chattock aus seinen Versuchen ab, dass das Verhältniss der electrischen Feldstärke bei positiver zu der bei negativer Ladung mit wachsendem Krümmungsradius abnimmt. In Wirklichkeit scheint auch hier keine einfache Gesetzmässigkeit zu bestehen; denn während aus meiner Tabelle V das Umgekehrte folgen würde, dass nämlich dieses Verhältniss für stumpfere Spitzen wächst, zeigt die folgende Tabelle, in der für eine Reihe von Spitzen die Werthe des Anfangspotentials bei positiver und negativer Ladung zusammengestellt sind, überhaupt kein Fortschreiten der Differenzen in einem bestimmten Sinne.

Die Tabelle VI enthält ausser den Potentialwerthen für die zwölf in Fig. 12 dargestellten Spitzen noch die Angaben für einige Blitzableiterspitzen. (Nr. 13 sogenannte Büschelspitze, 14 und 15 gewöhnliche Ableiterspitzen; 16 ist ein vorn abgerundeter Messingdraht von 4 mm Stärke.) Es ergibt sich, dass erst bei einer Spannung von 15000 Volt das Ausströmen von Electricität aus einem Blitzableiter gewöhnlicher Beschaffenheit beginnt.

Um die Spannung in absoluten electrostatischen Einheiten zu bekommen, sind die gegebenen Zahlen durch 300 zu dividiren.

---

1) Röntgen, Entladungen der Electricität in Isolatoren. Gött. Nachr. 1878. p. 390.

2) Wesendonck, Wied. Ann. **30.** p. 1. 1887.

3) Wesendonck, Wied. Ann. **39.** p. 577. 1890.

4) v. Obermayer, Wien. Ber. (2a) **100.** p. 127. 1891.

5) Chattock, l. c.

Tabelle VI.

laufende Nummer	Ladung positiv	Ladung negativ	Differenz
1	3 100 Volt	2 300 Volt	800 Volt
2	3 600 „	2 500 „	1 100 „
3	4 300 „	3 200 „	1 100 „
4	4 800 „	3 400 „	1 400 „
5	5 200 „	4 400 „	800 „
6	5 750 „	4 800 „	950 „
7	7 200 „	5 850 „	1 350 „
8	8 450 „	7 700 „	750 „
9	9 100 „	8 500 „	600 „
10	9 750 „	9 150 „	600 „
11	10 450 „	10 100 „	350 „
12	13 600 „	13 050 „	550 „
13	14 000 „	12 750 „	1 250 „
14	15 250 „	12 500 „	2 750 „
15	17 100 „	14 600 „	2 500 „
16	21 300 „	20 450 „	850 „

14. Ein *Büschel von Spitzen* lässt die Electricität schwerer ausströmen als die einzelne Spitze. Eine Reihe von Nähnadeln derselben Handelssorte, die untereinander eine ziemlich gleichartige Beschaffenheit hatten, wurden zu einem Spitzenbüschel vereinigt und ebenso untersucht wie die einzelnen Spitzen. Je mehr Nadeln man vereinigt, um so höher wird das Potential gefunden.

Tabelle VII.

Anzahl der Nadeln	positiv	negativ
1	4 300 Volt	3 000 Volt
5	4 900 „	3 200 „
10	5 600 „	4 200 „
20	7 600 „	5 700 „

Der in dieser Tabelle für eine Nadel angegebene Werth ist ein Mittelwerth aus Beobachtungen mit beliebigen fünf aus den zwanzig ausgewählten Nadeln. Viele gleiche Spitzen verhalten sich demnach wie eine stumpfere; auch ist die Ursache der Erscheinung offenbar dieselbe, die den Unterschied der Werthe bei stumpfen und scharfen Spitzen bedingt. Die Zahl der Kraftlinien ist bei gleicher Ladung an der einzelnen Spitze grösser als an mehreren. Ist nun zum Durchbrechen der Luft

stets die gleiche Anzahl Kraftlinien pro Flächeneinheit erforderlich, so wird diese Zahl an der einzelnen Spitze früher erreicht werden als an vielen; aus der einzelnen erfolgt daher das Ausströmen beim kleineren Potential.

15. Eine *Schneide* kann man sich aus sehr vielen dicht nebeneinanderstehenden Nadeln zusammengesetzt denken, und es wurde daher erwartet, dass für kürzere und längere Stücke derselben Schneide dieselbe Beziehung gelten würde wie für eine grössere oder kleinere Anzahl gleicher Spitzen. Für verschieden lange, rechteckige Stücke desselben sehr scharf geschliffenen Messers zeigte sich das in der That. Die Schneide stand bei diesen Versuchen horizontal und war nach oben gerichtet.

Tabelle VIII.

Länge der Schneide	positiv	negativ
18 mm	8 700 Volt	6 250 Volt
9 „	8 200 „	5 600 „
4,5 „	7 950 „	4 950 „

Hier ist übrigens die wesentliche Bemerkung zu machen, dass diese Zahlen in Wirklichkeit keinem Ausströmen aus den Schneiden selbst entsprechen. Bei Beobachtung im Dunkeln stellte sich nämlich heraus, dass nur an den oberen scharfen Ecken der Schneiden Büschelbildung eintrat, sodass die Werthe der obigen Tabelle ausser durch die zufällige Verschiedenheit der Ecken nur durch die wachsende Entfernung zwischen den beiden Büscheln bedingt sind. Ein Leuchten an der Schneide ist nie beobachtet worden. Auch bei einem äusserst feinen Präparirmesser vom beiläufigen Potentialwerth + 6400, − 4900 Volt leuchtete stets nur die Spitze. Die Büschel hatten gleiche Gestalt für positive und negative Ladung; ihre Grösse wuchs bei Annäherung der Hand, doch die Schneide blieb dunkel.

16. Verschiedene Gase ändern den Werth der Entladungsspannung in verschiedener Weise. Die Versuche sind so angestellt, dass die Spitze (eine feinere Nähnadel) in einen zur Erde abgeleiteten Messingcylinder, der als Gasbehälter diente, isolirt und gasdicht eingesetzt wurde. Die Gase wurden vor Einführung in den Cylinder durch Schwefelsäure, Chlorcalcium

und Wattefilter von Feuchtigkeit und Staub in gleicher Weise befreit, und die Versuche sind kurz hintereinander ausgeführt, um den Einfluss der Gase unter möglichst gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen zu untersuchen. Ich gebe im Folgenden das Mittel aus zwei zu verschiedenen Zeiten erhaltenen Versuchsreihen; bei der ersten wurde die electroskopische, bei der zweiten die galvanometrische Methode benutzt; beide zeigten gute Uebereinstimmung.

Tabelle IX.

	positiv	negativ
Luft	2 750 Volt	2 050 Volt
H	2 125 „	1 550 „
N	2 600 „	2 000 „
O	2 800 „	2 350 „
CO_2	3 475 „	2 100 „

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass die Aenderungen in verschiedenen Gasen nicht sehr bedeutend sind und dass die Grösse der Aenderung für positive und negative Electricität verschieden ist. Der Artunterschied bleibt indessen in gleichem Sinne bestehen; denn die negativen Werthe sind in allen Gasen kleiner als die positiven. Auffällig ist die geringe Aenderung der Spannung im Wasserstoff, die in beiden Versuchsreihen zweifellos hervortrat. Diese macht das Aufstellen einer ähnlichen Beziehung, wie sie Hr. Röntgen[1]) angibt, für das Potential, bei dem das Ausströmen in verdünnten Gasen aufhört, hier unmöglich, obschon nach der Leichtigkeit des Ausströmens positiver Electricität geordnet die Reihenfolge der Gase dieselbe ist, wie die der steigenden Dichten oder der abnehmenden molecularen Weglängen. Bemerkenswerth ist die annähernde Uebereinstimmung der Werthe für negative Electricität bei N, CO_2 und Luft, sowie das beträchtliche Anwachsen des positiven Entladungspotentials in CO_2.

17. Eine besondere Einwirkung des Metalles der Spitze, unabhängig von ihren geometrischen Verhältnissen, war nicht zu constatiren. Eine Stahlnadel ergab gleiche Werthe der Spannung beim Ausströmen, auch nachdem sie galvanisch mit

1) Röntgen, l. c. p. 402. R. findet das Product aus dieser Spannung und der mittleren Weglänge der Molecüle für verschiedene Gase constant.

einem Kupferüberzug versehen war. Die Gestalt der Nadel erschien bei fünfhundertfacher Vergrösserung ungeändert. Der Versuch beweist nichts über die absolute Grösse einer zwischen Metall und Gas bestehenden Contactkraft, sondern zeigt nur, dass die Unterschiede in der Grösse derselben bei Anwendung verschiedener Metalle jedenfalls unterhalb der hier möglichen Fehlergrenze liegen.

18. Ueberblicken wir noch einmal im Zusammenhang die Fülle der mitgetheilten Thatsachen, so muss zugegeben werden, dass eine einheitliche Erklärung derselben bei der Complicirtheit der Erscheinungen unmöglich ist. Auch war der Zweck der Arbeit wesentlich die Feststellung der thatsächlichen Verhältnisse, unter denen Electricität aus einer freiendigenden Spitze in gewöhnlicher Luft auszuströmen anfängt.

Die wichtigsten Resultate fasse ich hier kurz zusammen:

Spitzen können im allgemeinen sehr weit geladen werden, bevor Electricität aus ihnen ausströmt. Blitzableiterspitzen bewirken einen ruhigen Ausgleich zwischen electrischen Ladungen in der Atmosphäre und der Erde nur dann, wenn dabei an der Spitze eine Spannung von 15000 Volt erreicht wird. Selbst ausserordentlich scharfe Spitzen lassen sich bis rund 2500 Volt laden, ohne das ein andauerndes Ausströmen stattfindet; doch deuten viele Erscheinungen darauf hin, dass kleine momentane Entladungen schon bei beträchtlich geringerer Spannung erfolgen. Aus stumpfen Spitzen strömt schwerer Electricität aus, als aus scharfen, doch bestimmen sehr kleine Erhebungen an einer Spitze, seien sie metallischer Natur oder durch Staubtheile gebildet, das Potential nicht wesentlich. Staub in grosser Menge und Flammengase in der Umgebung der Spitze erschweren das Ausströmen, Bestrahlung mit ultraviolettem Licht befördert es. Verschiedene Gase ändern die Entladungsspannung für positive und negative Electricität in verschiedener Weise. Ein Büschel von gleichen Spitzen muss höher geladen werden, als die einzelne Spitze desselben, damit Ausströmen eintritt. Man kann Electricität nicht aus scharfen Kanten und Schneiden zum Ausströmen bringen, weil es stets aus den begrenzenden Ecken derselben leichter erfolgt.

II. Das Minimumpotential.

Minimumpotential nennt Hr. Röntgen[1]) die kleinste Spannung, bei der noch eben Ausströmen stattfindet, also das Potential in dem Augenblick, wo die Entladung aus der Spitze aufhört. Ich will es der Kürze halber mit M. P. und analog die Spannung, bei der die Entladung anfängt, mit A. P. (Anfangspotential) bezeichnen, da es sich im Folgenden wesentlich um eine Vergleichung dieser beiden Grössen handelt. Die Versuche ergaben übereinstimmend, dass das Ausströmen erst bei einer Spannung wieder aufhört, die mehr als 1000 Volt kleiner sein kann als die, bei der es anfing.

1. Die einfachste Methode zum Bestimmen des M. P. besteht darin, dass man das Electrometer in dem Augenblick abliest, wo das Electroskopblättchen in seine Ruhelage zurückkehrt. Auf diese Weise wurden zum Beispiel folgende Resultate erhalten:

	A. P.	M. P.
I.	+ 3500 Volt	+ 3150 Volt
	– 2750 „	– 2350 „
II.	+ 5100 „	+ 4325 „
	– 3700 „	– 3100 „
III.	+ 5600 „	+ 4650 „
	– 4200 „	– 3250 „

Das Verfahren hat die Schwierigkeit, dass die Bewegung des Blättchens zum Schluss ausserordentlich langsam wird und darum schwer zu beobachten ist. Es zeigt sich beim Aufhören des Ausströmens in der That genau dasselbe Verhalten, wie beim Beginn. Hier wird erst eine sehr kleine Menge entladen, die später schnell wächst, während dort ein grosser Ausschlag erst schnell, aber endlich sehr langsam abnimmt. Die Uebergänge aus dem statischen Zustand in den des Ausströmens und von diesem zurück in den statischen erfolgen also beide allmählich.

2. Dies zeigt sich auch, wenn man das Leuchten an der Spitze als Index für A. P. und M. P. benutzt. Für das M. P. ergeben sich dabei ganz analoge Resultate, wie bei Beobachtung des Electroskops. Nachdem das A. P. überschritten ist, wird die Zuleitung zur Leidener Flasche unterbrochen und die Ma-

1) Röntgen, l. c. p. 396.

schine abgestellt. Besonders bei negativer Ladung war dann die allmähliche Abnahme des Lichtpunktes an der Spitze sehr gut zu verfolgen. Der positive Büschel erlischt etwas plötzlicher; doch wurde bei stumpfen Spitzen dann noch längere Zeit *Glimmen* beobachtet. Ich gebe ein Beispiel. Nachdem bei einer Blitzableiterspitze das Potential auf 199 Scalentheile gestiegen war, wurde die Verbindung mit der Maschine aufgehoben und die Maschine stillgestellt. Unter steter Büschelentladung fiel die Spannung nach und nach auf 173 Scalentheile, dann kam der grosse Büschel noch einige male in kurzen Zwischenräumen zum Vorschein, und nun zeigte sich die Spitze mit Glimmlicht bedeckt, das erst bei 163 Scalentheilen erlosch, (1 Scalentheil = 80 Volt).

3. Uebrigens ist hervorzuheben, dass bei so starken Ladungen das M. P. sich davon abhängig zeigt, wie weit über das A. P. hinaus man die Ladung fortgesetzt hat, und wie lange Zeit. Je grösser die aus der Spitze entladenen Mengen und je stärker demnach die Ladung der Luft über der Spitze, um so eher hört nach Abschneidung der Electricitätszufuhr die Entladung auf; denn die starke Electrisirung der Luft bleibt eine sehr merkliche Zeit bestehen. So kann ein M. P. gefunden werden, das viel grösser ist, als das zugehörige A. P. Der richtige Werth des M. P., bezogen auf eine ungeladene Umgebung, ist natürlich um das sehr hohe Luftpotential, das oft viele tausend Volt betragen haben muss, kleiner. Constante Werthe für das M. P. sind demnach nur dann zu erhalten, wenn man die Ladung nur bis eben über das A. P. hinaus steigert, oder, wenn bei weiterer Steigerung die entladenen Mengen so klein sind, dass mit dem Aufhören des Ausströmens auch die Luft in der Umgebung der Spitze in ihren früheren Zustand zurückgekehrt ist. Deshalb ist bei den Versuchen die Wirksamkeit der Maschine durch Aenderung der Nebenentladung (vgl. p. 156) stets soweit herabgestimmt, dass nach dem Ueberschreiten des A. P. das Potential sehr bald constant wurde. Dann war die entladene Menge der zugeführten gleich und sehr klein. Wird in diesem Augenblick die Zuleitung von der Maschine unterbrochen, so erhält man für das M. P. gut übereinstimmende Werthe, die immer beträchtlich unter dem A. P. liegen. — Die grosse Constanz

des M. P., die Hr. Röntgen bei Entladung zwischen Spitze und Platte in verdünnten Gasen beobachtet hat, ist nur der dort gewählten Versuchsanordnung zuzuschreiben, wie Hr. Röntgen auch selbst hervorhebt.[1]) Diese (eine scharfe Spitze stand einer Platte von 132 mm Durchmesser in 19,3 mm Abstand gegenüber) machte die Ansammlung irgend welcher Ladungen im Dielectricum unmöglich.

4. Anfangs- und Minimumpotential lassen sich aus den Angaben des Electrometers allein entnehmen, wenn man bei allmählicher Electricitätszufuhr und späterem Unterbrechen derselben die Aenderung des Potentials mit der Zeit verfolgt. Macht man zum Beispiel alle 10 Secunden eine Ablesung, so zeigt sich, dass die Zunahme des Potentials für dieses Intervall *beim Beginn des Ausströmens* plötzlich kleiner wird. Ist das Potential constant geworden, und überlässt man nun nach dem Abschneiden der Zufuhr die geladene Flasche sich selbst, so fällt die Spannung zunächst sehr schnell, bis die Abnahme *nach dem Aufhören des Ausströmens* plötzlich kleiner wird, da sie dann allein von der Zerstreuung an die Umgebung und dem Verluste über die isolirenden Glasflächen herrührt.

Um diesen Verlust möglichst zu vermindern, wurde eine Leidener Flasche aus französischem Krystallglas hergestellt, die so vorzüglich isolirte, dass die Abnahme der Ladung in 10 Secunden nur $^1/_{10}$ Scalentheil betrug. Stellt man den Verlauf des Potentials mit der Zeit in Curven dar, so ergeben sich trotzdem für A. P. und M. P. keine sehr scharf definirten Punkte, ein neuer Beweis für den langsamen Beginn und die allmähliche Abnahme des Ausströmens (vgl. Fig. 14). Indessen ist das A. P. schon aus dem Gang der Beobachtungen mit Sicherheit zu erkennen. Ich gebe zum Beispiel den Anfang einer Versuchsreihe mit Nadel 8 (Fig. 12). (Vgl. Tabelle auf folgender Seite).

Aus der Tabelle geht hervor, dass bei 103,5 Scalentheilen = 8280 Volt das Ausströmen anfing (denn hier fällt die Zunahme des Potentials plötzlich von 8 auf 3,5 Scalentheile), ein Werth, der mit dem früheren gut übereinstimmt. Die zugehörige Potentialcurve (Fig. 14 die obere)[2]) zeigt an derselben Stelle eine

1) Röntgen, l. c. p. 393.
2) Sie umfasst 110 Beobachtungen.

Tabelle X.

Zeit	Spannung in Scalentheilen [1]	Zunahme
Sec. 0	0	
10	33,5	33,5
20	58,5	25,0
30	74,5	16,0
40	85,5	11,0
50	95,5	10,0
60	→ 103,5	8,0
70	107,0	3,5
80	110,7	3,7
90	113,7	3,0
100	116,2	2,5
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Unterbrechung ihrer Stetigkeit. — Der Punkt *C* der Curve bezeichnet die Spannung im Augenblick, wo die Verbindung der Leidener Flasche mit der Maschine aufgehoben wurde. Von da ab fällt das Potential erst rasch, später sehr langsam. Zur Bestimmung des M. P. verfährt man dann am besten so, dass man die Leidener Flasche an Stelle der Spitze mit einer Kugel versieht und nun die Abnahme des Potentials mit der Zeit beobachtet. Stellt man auch diese Resultate in einer Curve dar und vereinigt sie mit der früheren in der Weise, dass man, vou rückwärts beginnend, die gleichen Ordinaten zusammenfallen lässt und dann die Curve fortstezt, so trennen sich beide Curven an einer bestimmten Stelle, die das M. P. angibt; denn von hier an war der Verlust in beiden Fällen eine Folge der Zerstreuung allein. Da, wie man sieht, beide Curven von ihrer Vereinigung an fast genau *wie eine gerade Linie* verlaufen, so ist die Versuchsreihe mit der Kugel unnöthig. Man braucht nur den geradlinigen Theil der Potentialcurve *für die Spitze* zu verlängern, so gibt der Punkt, in dem die Curve sich von dieser Verlängerung trennt, das Minimumpotential. — Die untere Curve zeigt den Verlauf des Potentials für dieselbe Nadel bei *negativer* Ladung. Ich stelle für Nadel 8 die Resultate hier zusammen.

1) 1 Scalentheil = 80 Volt.

A. P.	M. P.
+ 8280 Volt	+ 6976 Volt
– 7055 „	– 5440 „

5. Es erübrigt noch eine Bemerkung über die Aenderung der Spannung beim Uebergang der Büschel in Glimmen. Hr. Wesendonck[1]) hat aus mehreren Versuchen den Schluss gezogen, „dass die Spannung beim Ersetzen der Büschel durch Glimmen beständig ansteigt“. In den oben angeführten Versuchen (p. 175) wurde dagegen bei abnehmender Spannung erst Büschelentladung, später Glimmen beobachtet. Das Glimmen erlosch erst bei einer um 800 Volt kleineren Spannung, als diejenige war, die dem letzten Aufblitzen eines Büschels entsprach. Demnach ergibt sich das Resultat, dass eine Aenderung der Lichterscheinung an der Spitze nicht nothwendig eine Aenderung der Spannung *in einem bestimmten Sinne* zur Folge hat oder durch sie bedingt wird.

III. Die durch Spitzen entladene Electricitätsmenge und ihre Beziehung zum Potential.

Die Kenntniss der aus Spitzen entladenen Electricitätsmenge in ihrer Beziehung zum Potential bietet das besondere Interesse, dass sie eine wenigstens angenäherte Vorstellung von der Menge gewinnen lässt, die durch einen Blitzableiter zur Entladung gebracht werden kann. Allerdings bedarf die hierbei nöthige Extrapolation aus Ergebnissen von Laboratoriumversuchen auf Verhältnisse, wie sie in der Natur unmittelbar gegeben sind, einer besonderen Rechtfertigung, denn sie ist gerade in diesem Falle oft missbraucht worden.

1. Die gewählte Versuchsanordnung ist im wesentlichen die früher beschriebene mit Benutzung des Galvanometers. Die innere Belegung einer Leidener Flasche wurde mit der einen Klemme eines du Bois-Reymond'schen Multiplicators verbunden, während die andere Klemme einen Draht trug, der in die Spitze endigte. Die gesammte durch die Spitze entladene Electricitätsmenge durchfloss demnach die 12 000 Windungen des Multiplicators und konnte so gemessen werden. Das Instrument war für Spiegelablesung eingerichtet worden

1) Wesendonck, Wied. Ann. **40**. p. 481. 1890.

und konnte vom Sitz des Beobachters gleichzeitig mit dem Electrometer abgelesen werden. Der Multiplicator wurde durch einen Richtmagneten auf passende Empfindlichkeit gebracht und dann mit Hülfe eines Daniellelementes von bekannter electromotorischer Kraft unter Anwendung verschieden grosser Nebenschlusswiderstände nach Ampère graduirt. Die Resultate wurden in einer Curve dargestellt, aus welcher die den abgelesenen Scalentheilen entsprechenden Stromstärken durch graphische Interpolation entnommen sind. Die Ausschläge waren sehr nahe den Stromstärken proportional; 1 Scalentheil entsprach rund $2{,}7 \times 10^{-9}$ Ampère. Der Widerstand des Galvanometers betrug 2417 Ohm. Durch eine zwischen den Maschinenelectroden angebrachte Nebenentladungsstrecke, aus zwei Spitzen bestehend, die einander mehr oder weniger genähert oder auch ganz entfernt werden konnten, war es möglich, die Ladung der Leidener Flasche auf jedem beliebigen Potential constant zu erhalten. Die Versuche wurden so angestellt, dass durch Aenderung der Nebenentladung die Spannung von sehr kleinen Werthen ausgehend in mässigen Intervallen gesteigert und zu der jeweiligen constanten Electrometereinstellung die zugehörige Stromstärke am Galvanometer abgelesen wurde. Das Anfangspotential, das also der Stromstärke Null entspricht, war durch die beginnende Bewegung der Galvanometernadel sehr scharf definirt. Mit wachsender Spannung steigt die Stärke des Entladungsstromes an; bei höheren Potentialen schwingt die Galvanometernadel, insbesondere bei negativer Ladung, um ihre jedesmalige Ruhelage mit einer Amplitude, die schliesslich 5 Scalentheile beträgt. Ihre Bewegung war viel ruhiger bei positiver Ladung.

2. Von der zwischen Strom und Spannung bestehenden Beziehung lässt sich am leichtesten eine Anschauung gewinnen, wenn man die Stromstärken zu Ordinaten, die zugehörigen Werthe der Spannung zu Abscissen einer Curve macht. Die Tafel Fig. 15 zeigt mehrere solche Curven für verschiedene Spitzen bei positiver Ladung. Alle Curven beginnen auf der Abscissenaxe mit dem Anfangspotential.[1]) Sie haben im wesentlichen den gleichen parabolischen Charakter; die entladene

1) Ueber Curve (*M*) siehe 3.

Menge wächst erst langsamer, später nahezu proportional der Spannung. Bei gleicher Spannung wird aus der schärferen Spitze die grössere Menge entladen; doch scheinen die Unterschiede in der Spitzenbeschaffenheit bei hohen Spannungen allmählich zu verschwinden. Da für negative Ladung im allgemeinen das Anfangspotential kleiner ist, so ist bei gleicher Spannung die entladene Menge negativer Electricität grösser. Die Uebereinstimmung der Resultate verschiedener Versuchsreihen war bei positiver Ladung eine recht gute. Ich gebe zum Beispiel die der gleichen Stromstärke von 100×10^{-9} Ampère entsprechenden Spannungen nach 6 Versuchreihen mit derselben Spitze (Nadel 5, Fig. 12).

	Spannung	Strom
22. Juli	+ 8 275 Volt	100×10^{-9} Amp.
22. „	8 000 „	
23. „	8 200 „	
24. „	8 150 „	
30. „	8 050 „	
2. Aug.	8 450 „	

3. Natürlich kann man auch so verfahren, dass man, von hohen Spannungen beginnend, die Intensität der Entladung allmählich auf Null herabmindert. Man erhält dann ganz analoge Curven, die sich nur in ihrem letzten Theil mehr der Abscissenaxe anschmiegen wegen der zuletzt sehr langsamen Abnahme der ausströmenden Electricitätsmenge (vgl. II, 1 u. 2, p. 174 u. 175). Der Vereinigungspunkt der Curve mit der Abscissenaxe gibt das Minimumpotential. (vgl. Curve [M]). Wegen der Ladung der Luft werden auch hier leicht zu hohe Werthe gefunden.

4. Um die Menge schätzen zu können, die aus einem Blitzableiter durch „ruhigen Ausgleich" entladen wird, ist es nöthig, einige vereinfachende Annahmen zu machen. Die gesammte Ladung einer Gewitterwolke von 1 Quadratkilometer Grösse sei auf dieser als Flächenbelegung vertheilt. Die Wolke bildet mit der Erdoberfläche einen Plattencondensator; daher ist die auf ihr befindliche Electricitätsmenge gegeben durch

$$E = V \cdot \frac{F}{4\pi h},$$

wenn V das Potential, F die Fläche der als eben vorausgesetzten Wolke und h die Dicke der isolirenden Schicht, hier also die Höhe der Wolke über der Erdoberfläche bezeichnet. Für diese Höhe kann man 1000 m als einen wahrscheinlichen Werth annehmen.[1]) Das Potential V lässt sich schätzen aus der Länge eines Blitzstrahles zwischen Wolke und Erde, im Minimum 1000 m, wenn man gemäss den Beobachtungen über Funkenpotentiale der Einfachheit halber für je 1 mm Funkenlänge 4000 Volt rechnet. Dann folgt für $V^4/_3 \,.\, 10^7$ C. G. S. electrostat. Drückt man alle Längen in Centimetern aus, so ergibt sich für die Ladung der Gewitterwolke

$$E = \frac{1}{3\pi} \,.\, 10^{12} \text{ C. G. S. electrost,}$$

oder, da die electrostatische Mengeneinheit gleich $^1/_3 \,.\, 10^{-9}$ Coulomb ist

$$E = \frac{1}{9\pi} \,.\, 10^3 \text{ Coulomb.}$$

$$E = 35{,}4 \text{ Coulomb.}$$

Zur Bestimmung der Stärke des Entladungsstromes aus dem Blitzableiter bei einer Spannung, die dem Blitzpotential gleich ist, benutzen wir die für eine Blitzableiterspitze bei Versuchen mit der Influenzmaschine erhaltene Curve, Tafel Fig. 12. Zwar entspricht diese Curve dem Ausströmen gegen einen in $3\,^1/_4$ m Abstand befindlichen Leiter (die Zimmerdecke), doch zeigt der fast genau parallele Verlauf aller Curven, die sich auf sehr stark verschiedene Spitzen beziehen, dass die Zimmerdecke bei den gegebenen Spannungen schon als praktisch unendlich entfernt anzusehen ist. Daher darf die Blitzableitercurve auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden, wo die Spitze einer Wolke in 1000 m Entfernung gegenübersteht. Der Verlauf der Curve ist schon von einer Spannung von 16000 Volt an fast völlig geradlinig. Wir dürfen daher die Annahme machen, dass der Strom von da ab proportional der Spannung wächst. Dann ergibt sich für das Blitzpotential von $4 \,.\, 10^9$

1) 1000 m ist ein Mittelwerth, den ich aus eigenen Beobachtungen an zwei Gewittertagen durch Schätzung der Höhenwinkel von Blitzen und Messung der Zeit zwischen Blitz und Donner gewonnen habe, man vgl. auch Eckholm und Hagström, Meteorol. Zschr. **4.** 73—78. 1889.

Volt eine Stärke des Entladungsstromes von 0,0567 Ampère. Durch die Erfahrungen, die wir über die Stärke der Büschelentladung bei Gewittern haben, wird der Wahrscheinlichkeit eines solchen Werthes mindestens nicht widersprochen.

5. Diese Stromstärke herrscht nur bei der grössten möglichen Spannung; sie nimmt mit abnehmender Spannung bis zu Null ab. Stellen wir die Frage so, dass wir die Zeit bestimmen, in der die Wolke durch einen Blitzableiter entladen werden würde, so können wir daher annehmen, dass während dieser ganzen Zeit eine mittlere Entladungsstromstärke von 0,028 Ampère herrscht. Diese bringt dann in jeder Secunde 0,028 Coulomb zur Entladung, und danach wäre die gesammte Electricität der Wolke in 21 Min. ausgeglichen. Nun ist aber zur Verhinderung des Blitzschlages ja nur nöthig, dass die Spannung um einen ausreichend grossen Betrag unter den zur Funkenbildung erforderlichen Werth erniedrigt wird.

Könnten wir also die Wolke überhaupt mit einem geladenen Conductor vergleichen, so dürfte man sich auf Grund dieser Ergebnisse ernstlich die Frage vorlegen, ob es nicht möglich sein könne, durch Aufstellung einer hinreichend grossen Zahl von Blitzableitern das Entstehen von Gewittern überhaupt zu verhindern.

6. In Wahrheit ist ein solcher Vergleich unmöglich. Vielmehr muss man daraus, dass bei Gewittern die Blitzschläge sich in so kurzer Zeit folgen und oft in grosser Zahl gleichzeitig auftreten, auf die Wirksamkeit ganz ungeheurer Electricität erregender Kräfte in den Wolken schliessen. An derselben Stelle, wo wir soeben einen Blitz bemerkten, zeigt sich oft im nächsten Moment schon ein neuer. Gegenüber dieser gewaltigen Geschwindigkeit in der Wiederbildung neuer Ladungen ist die ausgleichende, Blitzschläge verhindernde Wirksamkeit der Spitzen völlig verschwindend, ganz abgesehen davon, dass es viele Fälle gibt, in denen der Einfluss der Spitzen überhaupt nicht zur Geltung kommen kann, wie bei der Hervorrufung eines Blitzschlages durch einen anderen.[1]) Auch zeigt die Erfahrung, dass keine Abnahme in der Intensität der Ge-

1) Ueber diesen Gegenstand vgl. man die Arbeit von O. Lodge: On Lightning Conductors, Electrician. Vol. XXI. p. 234. 1888, auch später ebenda.

witter zu bemerken ist, selbst wo sehr viele Spitzen vorhanden sind. Denn man dürfte nicht annehmen, dass eine Stadt mit ihren Kirchthürmen, Kaminen, hervorragenden Gebäuden und anderen Blitzableitern ganz ohne wahrnehmbaren Einfluss auf die Gewitter wäre, wenn nicht die Bildung neuer Electricitätsmengen mit so grosser Schnelligkeit erfolgte.

Zum Schluss bleibt mir die angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Hrn. Prof. Hertz, für die Anregung zu dieser Arbeit und die stete Förderung, die er mir zu theil werden liess, meinen innigsten Dank auszusprechen.

7. *Ueber Reflexion electrischer Drahtwellen;*
von Josef Ritter von Geitler.

(Nach seiner Bonner Inaugural-Dissertation für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Nachdem durch V. Bjerknes[1]) die Dämpfung der electrischen Schwingungen im primären Hertz'schen Leiter untersucht worden war, lag der Gedanke nahe, die Dämpfung zu ermitteln, welche ein electrischer Wellenzug beim Fortschreiten an einer langen Drahtleitung erleidet.

So fasste ich denn im Herbst 1891 den Entschluss, die eben berührte Frage zu beantworten. Die Methode, welche ich zu benutzen gedachte, werde ich kurz auseinandersetzen; doch muss ich hier schon bemerken, dass, so einfach die Sache auf den ersten Blick scheinen dürfte, meine diesbezüglichen Versuche gleichwohl nicht den gewünschten Erfolg hatten, ja sogar, wie ich später einsah, und wie es sich auch aus dem Weiteren ergeben wird, den gewünschten Erfolg nicht haben konnten.

Dagegen stiess ich bei diesen Versuchen auf unerwartete Erscheinungen, deren Kenntniss bei Untersuchungen über electrische Drahtwellen überhaupt von Nutzen ist. Diese Erscheinungen bilden den eigentlichen Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Zunächst wurde die von Hrn. Bjerknes[2]) angegebene Versuchsanordnung ziemlich unverändert wieder hergestellt. Sein mir freundlichst überlassenes Electrometer wurde im ersten Maximum vor dem Ende der ca. 100 m langen geschlossenen secundären Leitung angebracht und immer in dieser Stellung belassen. Meine Absicht war, zur Ermittelung der Dämpfung die Abnahme des Electrometerausschlages zu messen, wenn die Länge der secundären Leitung allmählich vergrössert wurde. Das einzige, was als Resultat dieser Ver-

---

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 513. 1891.
2) V. Bjerknes, l. c.

suche mitgetheilt werden kann, ist, dass die Dämpfung der verwendeten Wellen von ca. 10 m Länge in einer Leitung aus 1 mm starken Kupferdrähten, die in 5 cm Abstand gehalten waren, nicht erheblich ist. Wurden statt derartiger Kupferdrähte entweder 0,1 mm dicke Kupfer- oder Neusilber- oder Eisendrähte zur Verlängerung der Leitung benutzt, so genügten schon einige Meter derselben, um den Electrometerausschlag um weit mehr als die Hälfte zu verkleinern. Die letztere Erfahrung, dass in dünnen Drähten die Dämpfung eine sehr starke ist, kam mir bei späteren Versuchen zu statten.[1]

Da bei der grossen Unregelmässigkeit der primären Funken und der, wie ich mich überzeugt hatte, geringen Dämpfung bei Verwendung stärkerer Kupferdrähte einigermaassen exacte Messungen nur äusserst schwer ausführbar waren, so ging ich zu einer anderen Methode über.

Ich verfertigte mir ein Differentialelectrometer, mit Hülfe dessen ich durch eine einzige Ablesung Intensitätsunterschiede an Punkten messen konnte, welche durch ein beliebig langes Stück der Leitung voneinander getrennt waren. Die Beschreibung des Apparates und seiner Anwendung folgt in einem späteren Abschnitte.

Indem ich ferner an das Ende der Leitung ca. 60 m dünnen Eisendraht anschloss, in welchem sich die Welle erfahrungsmässig vollständig todtläuft, hoffte ich zu erreichen, dass jeder vom primären Kreise (Blondlot'sche[2]) Aufstellung) ausgesendete Wellenzug die secundäre Leitung nur ein einzigesmal durchlaufe, sodass in der Leitung nirgends stehende, sondern nur fortschreitende Wellen vorhanden wären. Das Differentialelectrometer schien dann sehr geeignet, um Intensitätsunterschiede der fortschreitenden Wellen zu messen, welche zwischen einem festgewählten und einem veränderlichen Punkte der Leitung stattfinden. Diese Methode schien die gestellte Frage leicht und schnell beantworten zu können.

Als ich diese Messungen auszuführen versuchte, erhielt ich aber sehr unregelmässige und wunderliche Resultate, sodass

---

1) Vgl. auch V. Bjerknes, Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892.

2) R. Blondlot, Compt. rend. **114.** p. 283. 1892, oder Graetz, Rev. **1.** p. 308. 1892.

es mir anfangs ganz unmöglich war, dieselben zu erklären. Nachdem ich lange Zeit nach Fehlern des Electrometers etc. vergeblich gesucht hatte, fand ich endlich, dass mein Misserfolg einem eigenthümlichen Verhalten der electrischen Drahtwellen zuzuschreiben sei.

Ich hatte bei Aufstellung der ca. 280 m langen Leitung die Drähte zwar möglichst parallel gemacht, jedoch auf eine peinlich gleiche Grösse ihres Abstandes in allen Punkten nicht geachtet, da ich annahm, dass eine Veränderung dieses Abstandes ohne Einfluss sein müsse, solange sie klein gegen den ganzen Abstand wäre. Es zeigte sich nun, dass diese Annahme irrig gewesen war. Es fand sich vielmehr, dass die Wellen an solchen Stellen der Leitung, an welchen der Parallelismus der Drähte auch nur in geringfügiger Weise gestört war, eine theilweise Reflexion erleiden. Ich erkannte dies daran, dass sich vor jeder solchen Störungsstelle durch Interferenz der ursprünglichen und der reflectirten Welle ein System von Maximis und Minimis der Intensität ausbildet.

Durch diese Erkenntniss war nun zunächst die Unregelmässigkeit der in den ursprünglichen Versuchen erhaltenen Resultate hinlänglich erklärt. Auch war es mir nicht möglich, die Ursachen dieser Unregelmässigkeit zu umgehen und nur da, wo sehr lange, völlig gerade, mit grosser Sorgfalt aufgestellte Leitungen zur Verfügung stehen, wird man diese Versuche in der von mir beabsichtigten Form zur Ausführung bringen können.

Dagegen fand ich bei genauerem Zusehen ferner, dass solche Reflexionen nicht nur an Verengungen und Erweiterungen der Leitung stattfinden, sondern auch an solchen Stellen, wo ein Uebergang von dünnerem zu dickerem Draht oder umgekehrt stattfindet.

Aehnlich, wie eine Verengung der Leitung, wirkt auch ein Condensator, dessen Belegungen mit je einem Leitungsdrahte verbunden sind.

Die Grösse des reflectirten Theiles hängt von der Grösse der angebrachten Veränderung ab und wächst mit dieser (z. B. mit der Grösse des Condensators).

Die bei der Reflexion erlittene Phasenverschiebung ist nicht in allen Fällen dieselbe. Man erkennt dies an der Ent-

fernung des ersten Maximum oder Minimum von der Reflexionsstelle. Die Phasenverschiebung liegt für Verengungen, Condensatoren und den Uebergang zu dickerem Drahte zwischen 0 und $\lambda / 2$, für Erweiterungen oder den Uebergang zu dünnerem Draht zwischen $-\lambda / 2$ und 0. Die Grenzwerthe 0 und $\lambda / 2$ werden erreicht, wenn die Leitung an der betreffenden Stelle entweder ganz geöffnet (durchschnitten) oder durch einen quer übergelegten Draht vollständig geschlossen ist.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung von Einzelheiten über.

1. Die Versuchsanordnung (Fig. 1). Die Erregung der Wellen geschah nach der von Blondlot[1]) angegebenen Methode. Die Wellenlänge betrug $\lambda = 18{,}4$ m.

Um die Wirksamkeit der primären Funken wenigstens einigermaassen constant zu halten, erwies sich, wie schon Hr. Classen[2]) gefunden hat, ein gegen die Funkenstrecke gerichteter constanter Luftstrom als sehr zweckmässig.

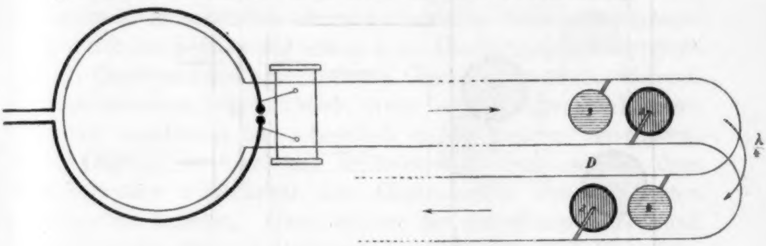


Fig. 1.

Die Drähte der secundären Leitung, deren Gesammtlänge 280 m betrug, waren durch Holzstücke mit entsprechend angebrachten Einschnitten überall in dem möglichst constanten gegenseitigen Abstand von 8 cm gehalten. Das Material der Drähte war auf eine Strecke von ca. 220 m 1 mm starker Kupferdraht; das Ende der Leitung bildeten aus dem oben erwähnten Grunde 60 m 0,1 mm starken Eisendrahtes.

Das Differentialelectrometer *D* befand sich ca. 140 m vom Anfange der Leitung entfernt. Es hatte die folgende Einrichtung:

1) R. Blondlot, l. c.

2) H. Classen, Wied. Ann. **39.** p. 647. 1890; vgl. auch Boltzmann, Wied. Ann. **40.** p. 399. 1890; A. Toepler, Wied. Ann. **46.** p. 478. 1892.

2. Das Electrometer (Fig. 2). In einem parallelepipedischen Glaskästchen von 12 cm Höhe, 7 cm Länge, 2 cm Breite hängt an einem äusserst feinen Quarzfaden, für dessen freundliche Ueberlassung ich Hrn. Dr. Eugen Blasius in Berlin zu bestem Danke verpflichtet bin, eine Doppelnadel aus dünngewalztem Aluminium. Die beiden Theile der Nadel sind bei *g* durch ein 5 mm langes dünnes Glasstäbchen starr verbunden. Die untere Nadel hat bei *s* einen kleinen Spiegel, um Ablenkungen der Nadel mit Fernrohr und Scala messen zu können. Da die Torsionskraft des Quarzfadens äusserst

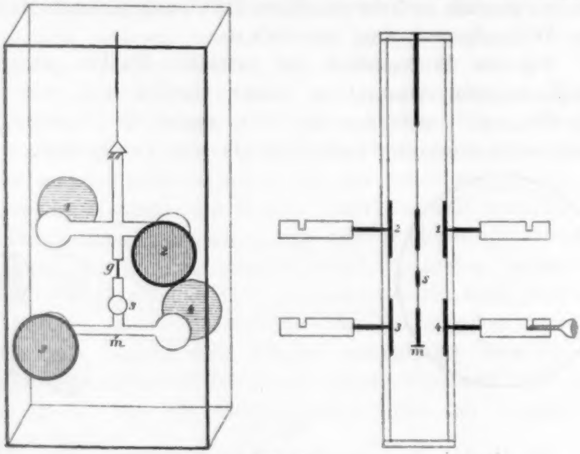


Fig. 2.

gering war, wurde die richtende Kraft eines 2 mm langen, bei *m* an der unteren Nadel befestigten Magneten benutzt, welcher mit Hülfe je eines vor und hinter dem Electrometer angebrachten Magneten eingestellt werden konnte. Zur feinen Einstellung diente ein dritter Magnetstab. An der Innenseite der vorderen und hinteren Glaswand sind Messingplättchen von 1,5 cm Radius angekittet. An diesen Plättchen befinden sich Ansätze, welche das Glas durchsetzen und mit den Leitungsdrähten verbunden werden können. An der vorderen Glaswand sind die Platten bei 2, 3, an der rückwärtigen bei 1, 4 angebracht.

Werden mithin die Platten 1, 2 mit der Leitung ver-

bunden, so wird die Electrometernadel — von oben gesehen — im Sinne des Uhrzeigers gedreht. Eine entgegengesetzte Drehung findet statt, wenn man die Platten 3, 4 mit der Leitung verbindet. Es ist also klar, dass, wenn man denselben Wellenzug auf beide Plattenpaare wirken lässt, der resultirende Ausschlag die Differenz der Intensitäten angibt, welche die Welle bei 1, 2, resp. 3, 4 besitzt, und zwar mit dem richtigen Vorzeichen, vorausgesetzt, dass die Stellung der Nadel ursprünglich eine solche war, dass bei gleichzeitiger, gleichstarker Einwirkung auf 1, 2, wie auf 3, 4 kein Ausschlag eintritt.

3. Bei den anfänglichen Versuchen waren die beiden Plattenpaare durch ein längeres Stück der Leitung (16 m) verbunden. Die Störungen wurden an diesem Theile der Leitung angebracht.

Späterhin traf ich eine zweckmässigere Anordnung. Die Länge des zwischen dem oberen und unteren Plattenpaare gelegenen Stückes der Leitung war $= \lambda/4$. Die Störungen (hauptsächlich Condensatoren verschiedener Capacität) wurden, während alles andere unverändert blieb, an der Leitung hinter dem Electrometer angebracht und allmählich an der Leitung verschoben.

Es sei die Lage der Reflexionsstelle eine solche, dass das untere Plattenpaar des Electrometers sich im ersten Minimum befindet. Dann ist bei der getroffenen Anordnung am Orte des oberen Plattenpaares ganz bestimmt ein Maximum. Man erhält einen, und zwar den grössten Ausschlag im Drehungssinne der oberen Platten. Entfernt sich die Reflexionsstelle vom Electrometer immer weiter, so sinkt der Ausschlag mehr und mehr; er wird endlich Null, wenn das obere und untere Paar sich an Stellen gleicher Intensität befinden; bei fortgesetzter Entfernung der Reflexionsstelle stellt sich ein wachsender Ausschlag im Sinne der unteren Platten ein, welcher einen grössten Werth erreicht, wenn endlich die Stelle der oberen Platten einem Minimum, diejenige der unteren Platten einem Maximum entspricht etc. Die Electrometerausschläge geben somit ein getreues Bild der Intensitätsverhältnisse vor der gestörten Stelle; vorausgesetzt ist natürlich, dass bei ungestörter Leitung kein Ausschlag erfolgt.

Die Vortheile, welche die Anwendung des Differential-

electrometers mit sich bringt, sind unverkennbar. Eine besondere Annehmlichkeit liegt darin, dass man bei vielen Versuchen, wo nicht die äusserste Genauigkeit verlangt wird, in hohem Grade von der sonst sehr störenden unregelmässigen Wirksamkeit der primären Funken unabhängig gemacht wird. Wird das in die Nulllage gebrachte Electrometer mit der Leitung verbunden, so werden, bei beliebig gesteigerter Empfindlichkeit des Apparates, beliebig kleine Intensitätsunterschiede mit voller Sicherheit durch eine einzige Ablesung constatirt. Zweifel über das Vorzeichen sind ausgeschlossen, da der Sinn des Ausschlages der entgegengesetzte ist, je nachdem das eine oder das andere Plattenpaar stärker auf die Nadel wirkt. Auch der absolute Werth der Differenz lässt sich mit einiger Genauigkeit durch eine einmalige Ablesung ermitteln, wobei dann allerdings die Unregelmässigkeit der primären Funken nicht vernachlässigt werden kann.

Zu einer genauen Berechnung des Verhältnisses zwischen der Amplitude der ursprünglichen und reflectirten Wellen eignen sich die bisherigen Versuche nicht. Meine Versuchsanordnung litt nämlich an dem Mangel, dass die secundäre Leitung zu kurz, bez. die Dämpfung im primären Kreise eine zu geringe war. Infolgedessen kehrten die an den Unregelmässigkeiten der Leitung reflectirten Theile der Welle zum Ursprung der Leitung zurück, ehe noch der primäre Kreis vollständig aufgehört hatte, Schwingungen auszusenden; der letztere wurde daher (wie man sich durch geeignete Versuche überzeugen konnte) von der secundären Leitung beeinflusst, und zwar natürlich je nach der Grösse des reflectirten Theiles in verschieden hohem Maasse. Dadurch wurden quantitative Versuche unmöglich; deshalb begnüge ich mich damit, die qualitativen Versuchsergebnisse mitzutheilen.

4. Mit der in Nr. 3 beschriebenen anfänglichen Anordnung wurden Versuche über die Reflexion an Verengungen und Erweiterungen angestellt. Die letzteren wurden durch Holzstücke hergestellt, welche mit entsprechenden Einschnitten für die Drähte versehen waren (Fig. 3). Da die Nadel zu Beginn nicht in der Nulllage war, so entsprechen die Ausschläge sämmtlich dem Drehungssinne der oberen Platten. In der Fig. 4 ist die Entfernung der Verengung (Erweiterung) von

den oberen Platten in Metern als Abscisse, der zugehörige Ausschlag in Scalentheilen als Ordinate verzeichnet. Bei diesen Versuchen über Verengung (Curve I) war der Abstand der Drähte 8 cm, an der verengten Stelle 2 cm; das Umgekehrte

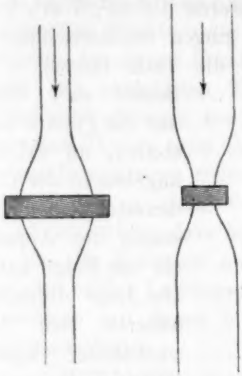


Fig. 3.

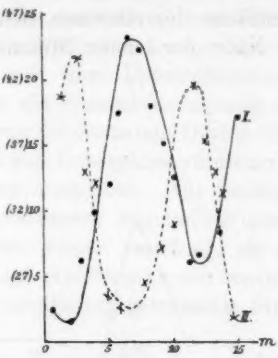


Fig. 4.

gilt für die Erweiterung (Curve II). Die Ordinaten der Curve I sind in Fig. 4 aus Gründen der Raumersparniss alle um 22 Scalentheile verkleinert worden.

5. Im weiteren ist die in Nr. 3 erwähnte endgültige Anordnung vorausgesetzt.

Plattencondensatoren aus Zinkblech von verschiedener Grösse wurden in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise hinter dem Electrometer an verschiedenen Stellen der Leitung angebracht. In Fig. 6 sind die Abstände der Condensatoren von den unteren Electrometerplatten in Metern als Abscissen, die entsprechenden Ausschläge in Scalentheilen als Ordinaten angegeben. Die beobachteten Punkte der Curven sind in der Zeichnung kenntlich gemacht; sie entsprechen einer je einmaligen Ablesung. Ausschläge im Sinne der unteren Platten sind nach oben, solche im Sinne der oberen Platten nach unten aufgetragen. Man sieht, dass die Grösse des reflectirten Theiles

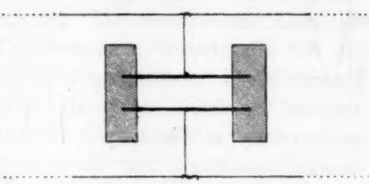


Fig. 5.

mit der Grösse der angebrachten Veränderung wächst, und dass die Phasenverschiebung, die in der verschiedenen Lage des ersten Minimum sich kundgibt, mit vergrösserter Capacität des Condensators sich $\lambda / 2$ mehr und mehr nähert. Bei den grösseren der verwendeten Condensatoren (0,5 m^2, 1 m^2, 2 m^2 Oberfläche der einzelnen Belegung) gingen die Ausschläge in der Nähe der ersten Minima über die Scala hinaus — es liessen sich daher nur die Punkte feststellen, an welchen angebracht der Condensator keinen Ausschlag des Apparates zur Folge hatte. Die Lage derselben näherte sich mit wachsender Capacität immer mehr derjenigen, in welcher auch ein querübergelegter Draht (geschlossene Leitung) das Electrometer in Ruhe liess.

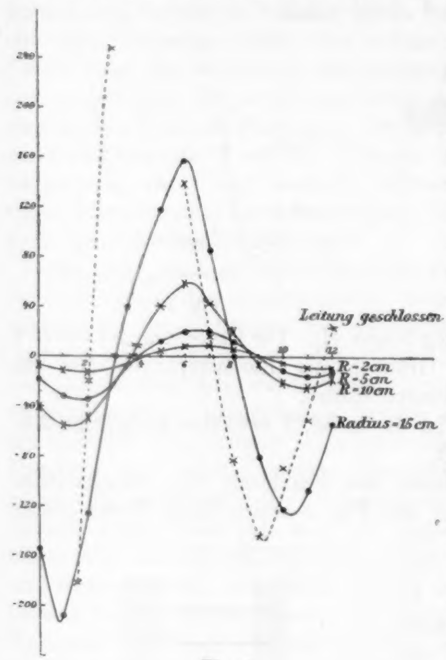


Fig. 6.

Damit die Curven in Fig. 6 die Vertheilung der Intensität längs der Leitung richtig darstellen, für den Fall, dass die Wellen von der positiven x-Seite her gegen den Nullpunkt kommen, in welchem der betreffende Condensator angebracht zu denken ist, müsste man, wie leicht einzusehen, die x-Axe in entsprechender Weise nach abwärts verschieben. Keines der Minima ist Null, den einzigen Fall der vollständig geschlossenen Leitung ausgenommen. Die Curven zeigen daher, in welcher Weise die Intensität, ohne an irgend einem Punkte ganz zu verschwinden, um den

mittleren Werth schwankt, welchen sie bei ungestörter Leitung hätte, und welcher — abgesehen von der Dämpfung im secundären Leiter — durch eine der x-Axe parallele Gerade dargestellt würde.

6. Auch über den Einfluss des Ueberganges von dickerem zu dünnerem Drahte, oder umgekehrt, machte ich orientirende Versuche, als deren Ergebniss ich mittheilen kann, dass die Grösse des reflectirten Theiles von dem Unterschiede der Querschnitte abhängt, sowie, dass die Phasenverschiebung des reflectirten Theiles beim Uebergange zu dünnerem Drahte dem an einer Erweiterung erlittenen, beim Uebergange zu dickerem Drahte jenem an einer Verengung entspricht. Nur beiläufig will ich bemerken, dass mein Electrometer empfindlich genug war, um die Reflexion anzuzeigen, welche stattfand, als ich jeden der beiden Leitungsdrähte auf eine Strecke von wenigen Centimetern mit einem in Zinkvitriollösung getränkten Bindfaden umwickelte.

7. Versucht man es, sich den Vorgang bei den beschriebenen Reflexionen zu erklären, so könnte man in dem Falle der Condensatoren auf folgenden Gedanken kommen: Die ankommende Welle verzweige sich an der Verbindungsstelle Condensator — Leitung. Ein Theil der Welle gehe an der Leitung weiter, der andere lade den Condensator. Dieser entlade sich wieder und der Entladungsstrom — wenn man so sagen darf — gehe zur Hälfte nach der positiven, zur Hälfte nach der negativen Seite der Leitung, wo er mit dem ankommenden Wellenzuge interferirt. Die verschiedene Ladungs- und Entladungsdauer der Condensatoren könnte die bei der Reflexion erlittene Phasenverschiebung erklären. Die Erfahrung bestätigt diese Anschauung durchaus nicht. Nach der letzteren müsste bei fortgesetzt wachsender Capacität des Condensators die Phasenverschiebung periodisch ab- und zunehmen; ausserdem aber müsste die mittlere Intensität der Wellen hinter dem Condensator in entsprechender Weise variiren, wie die Phasenverschiebung. Beiden Folgerungen wird durch die Erfahrung widersprochen. Bei den diesbezüglichen Versuchen wie auch in den oben beschriebenen verwendete ich Condensatoren von 2 cm Plattenabstand; der Radius der Platten betrug 1 bis 20 cm, ferner wurden Condensatoren von 1 m^2 und

2 m² Oberfläche der einzelnen Belegung verwendet. Weder bei der Phasenverschiebung, noch bei der Intensität der durchgelassenen Welle wurde eine periodische Zu- und Abnahme gefunden.

Ich habe diesen Punkt deshalb berührt, weil es thatsächlich gelingt, eine Versuchsanordnung herzustellen, welche mit der Methode der Condensatoren eine gewisse Aehnlichkeit hat und bei welcher die erwähnte Betrachtungsweise wirklich zutrifft.

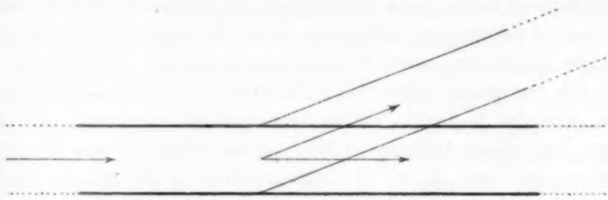


Fig. 7.

An irgend einer Stelle der Leitung wird *eine Zweigleitung* angebracht, wie dies in Fig. 7 angedeutet ist. Vergrössert man die Länge der Zweigleitung, so sieht man den Ausschlag eines hinter der Verzweigungsstelle an der Hauptleitung angebrachten einfachen Electrometers periodisch ab- und zunehmen.

Der Verlauf der Curve, welche den Electrometerausschlag als Function der Länge der Zweigleitung darstellt, ist genau der entgegengesetzte, wenn die Zweigleitung an ihrem Ende das eine mal geöffnet, das andere mal geschlossen ist. Die Erscheinung rührt offenbar davon her, dass der in die Zweigleitung gehende Theil der Welle bei der Reflexion am Ende derselben einen Phasenverlust 0 oder $\lambda/2$ erleidet, je nachdem die Zweigleitung geöffnet oder geschlossen ist. Fig. 8 stellt den Electrometerausschlag hinter der Verzweigungsstelle als Ordinate, die Länge der entsprechenden Zweigleitung als Abscisse dar. Curve I gibt den Verlauf bei geöffneter, Curve II bei geschlossener Zweigleitung. Die Zweigleitung dürfte auch ein bequemes Mittel zur Messung von Wellenlängen darbieten.

Das Hauptergebniss der vorliegenden Arbeit lässt sich kurz in folgendem Satze aussprechen:

„Wird ein electrischer Wellenzug in einer aus zwei, im übrigen parallel laufenden, gleichen Drähten bestehenden Leitung fortgesendet, so erleidet derselbe überall dort eine mit einem gewissen Phasenverluste verbundene theilweise Reflexion, wo entweder der Parallelismus der Drähte gestört ist, oder wo ein Uebergang von dickerem zu dünnerem Leitungsdraht oder umgekehrt stattfindet, oder wo ein Condensator in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise mit der Leitung verbunden ist.

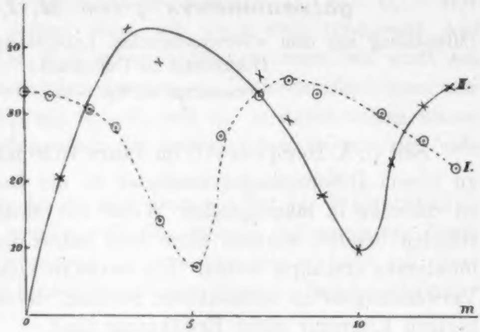


Fig. 8.

Zum Schlusse bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Hrn. Prof. Hertz für seine Rathschläge und die Liebenswürdigkeit, mit welcher er die Durchführung meiner Arbeit unterstützte, an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank zu sagen. [1])

1) *Nachtrag.* Durch Hrn. E. H. Barton in Bonn werde ich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, dass sich in die Formeln meiner Dissertation ein Fehler eingeschlichen hat, welcher jedoch die qualitativen Ergebnisse meiner Versuche ganz unberührt lässt.

Prag, im März 1893.

8. *Beitrag zur Verwendung des Differentialgalvanometers*[1]; *von M. Levy.*

(Mittheilung aus dem electrotechnischen Laboratorium der technischen Hochschule zu Darmstadt.)

(Hierzu Taf. II, Fig. 1—17.)

Seit C. A. Becquerel[2]) im Jahre 1826 mit dem Vorschlage zu einem Differentialgalvanometer in die Oeffentlichkeit trat, ist dasselbe in mannigfacher Weise zur Messung von Widerständen benutzt worden, ohne dass indess die möglichen Combinationen erschöpft wären. Ich werde in Folgendem auf einige Verwendungsarten aufmerksam machen, deren ich in der bisherigen Literatur nicht Erwähnung fand.

Im Anschluss hieran soll eine vergleichende Untersuchung über die Empfindlichkeit der gebräuchlichsten Widerstandsmessmethoden angestellt werden.

I. Differentialgalvanometer in „Brückenschaltung".

Es verzweige sich ein Strom J in zwei Leiter vom Widerstande R und W; und P_1 habe (vgl. Taf. II, Fig. 1) gleiches Potential mit Q_1, P_2 mit Q_2 oder, wie ich der Einfachheit halber sagen will: es seien P_1 und Q_1, P_2 und Q_2 *„zugeordnete"* Punkte. Verbinden wir die Quadrantenpaare eines Electrometers mit den Punkten P_1 und Q_1, sowie P_2 und Q_2, so haben wir in beiden Fällen keinen Ausschlag. Gehen wir indess auf dem Drahte W von Q_1 nach Q_1' um einen bestimmten Widerstand w' vor, so wird das Electrometer eine Potentialdifferenz $i_w \, . \, w'$ anzeigen. Dieselbe Potentialdifferenz erhalten wir auch, wenn wir von Q_2 aus um dasselbe w' nach Q_2' vorgehen und P_2 nebst Q_2' an die beiden Quadrantenpaare anlegen. Gäbe es demnach ein *„Differentialelectrometer"*[3]), so könnte man bei Fest-

1) Auszug aus der Dissertation: Beitrag zur Verwendung des Differentialgalvanometers, Berlin 1892, Verlag von G. Schade (O. Francke).

2) C. A. Becquerel, Ann. de chim. et phys. Ser. II. **32.** p. 420. 1826, und Traité d'électr. et de magn. **3.** p. 74.

3) Ein solches ist neuerdings von Heerwagen benutzt worden. Vgl. Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893.

halten von P_1 und P_2 zu einem beliebig gewählten Punkte Q_1' einen Punkt Q_2' durch eine Messung so finden, dass zwischen Q_1' und Q_2' absolut genau derselbe Widerstand liegt, wie zwischen den P_1 und P_2 „zugeordneten“ Punkten Q_1 und Q_2. Wir werden sogleich sehen, dass wir auch eine genügende Annäherung an diesen Fall erhalten können, wenn wir statt des gedachten Differentialelectrometers ein Differentialgalvanometer verwenden und P_1 mit Q_1', P_2 mit Q_2' je durch einen seiner Zweige so verbinden, dass die entstehenden Ströme sich entgegenwirken.

Da die ganze Anordnung dann wie bei der Wheatstone'schen Brücke zu treffen, nur das einfache Galvanometer durch ein Differentialgalvanometer zu ersetzen ist, so habe ich diese Art der Schaltung desselben mit dem Namen „*Brückenschaltung*“ belegt.

Für die Bestimmung kleinerer Widerstände — es sind darunter solche von etwa 1 Ω bis $^1/_{50}$ Ω verstanden, ohne dass diese Grenzen festlägen — gewährt das Differentialgalvanometer in Brückenschaltung die Möglichkeit, alle Zuleitungs- und Uebergangswiderstände unschädlich zu machen, und zwar mittels einer Einstellung und Benutzung der einfachen Hülfsmittel der Wheatstone'schen Methode.

Eine nähere Erläuterung gibt Fig. 2, wo ein Universalwiderstandskasten als gegeben vorausgesetzt ist. w und w_2 stellen die Uebersetzungs-, die Δu Uebergangs-, die Δz Zuleitungswiderstände dar; r_2 ist der Vergleichswiderstand, woraus r_1 und w_1 gebildet werden, ist belanglos; wir haben nur darauf zu achten, dass w_1 / W ungefähr gleich r_1 / R ist, und ferner die Uebersetzung w / w_2 so zu wählen, dass $\Delta u_5 + \Delta z_3 + \Delta u_6$ gegen r_2 vernachlässigt werden können. Dann erfolgt die Berechnung wie bei der Brücke nach der Formel

(1) $$x : w = R : W = r_2 : w_2.$$

Es fragt sich, wie gross bei Anordnungen dieser Art der Fehler ist, der durch die Abweichung der Punkte von den „zugeordneten“ — wir wollen ihn kurz den *Zuordnungsfehler* nennen — bewirkt wird.

Zur experimentellen Untersuchung dieser Frage habe ich die Fehler beobachtet, die sich ergaben, als man zwei Wider-

stände von $^1/_{10}$ resp. $^1/_{20}$ S. E. bei verschiedenen Uebersetzungsverhältnissen (von (1 : 100 bis 1 : 1000) und Zuordnungsfehlern bestimmte. Die Versuchsanordnung war nach dem Schema der Fig. 3 getroffen. Als Universalwiderstandskasten (U. W. K.) diente ein solcher von Siemens & Halske; ein weiterer einfacher Widerstandskasten (W. K.) gestattete r_1 zu variiren und so Zuordnungsfehler von gewünschter Grösse hervorzurufen. Das ziemlich empfindliche Galvanometer war in Wiedemann'scher Form von Plath in Potsdam hergestellt; die verwandten Spulen zeigten einen Widerstand von rund 400 S. E., sie waren zu je zweien parallel gegen einander geschaltet, sodass der Widerstand eines jeden Zweiges bei Zimmertemperatur etwa 200 S. E.[1]) betrug.

Das Resultat der Untersuchung war:

1. Je kleiner die Widerstände der Verzweigung gegenüber dem Galvanometerwiderstande sind, desto kleiner wird auch bei gleicher procentualer Abweichung von der Zuordnung[2]) der Fehler der Widerstandsbestimmung.

2. Der Fehler der Widerstandsbestimmung steigt im wesentlichen im geraden Verhältniss mit dem procentualen Zuordnungsfehler an, dem wiederum bei derselben Hauptstromstärke der durch den einzweigigen Strom im Galvanometer hervorgerufene Ausschlag proportional ist. Man kann sich demnach für jede Widerstandscombination schnell ein Bild des zu erwartenden Fehlers machen, indem man den unbekannten Widerstand bei zwei verschiedenen einzweigigen Ablenkungen a_1 und a_2 bestimmt. Ergeben diese Bestimmungen eine procentuale Differenz α, so kann für einen einzweigigen Ausschlag von 1 cm der Fehler mit etwa $\alpha / a_2 - a_1$ angesetzt werden.

3. Für einen einzweigigen Ausschlag von 1 cm — Differenz der beim Commutiren erhaltenen Einstellungen — war der Fehler der Widerstandsbestimmung durchgängig kleiner als $^1/_{100}$ Proc., im Mittel 0,0072 Proc. Da es nun immer leicht und schnell möglich ist — z. B. mittels eines blanken Drahtes und einer verschiebbaren Klemme — den Widerstand w_1 so

1) Mit Rollen von geringerem Widerstande hätte man noch höhere Empfindlichkeit erzielen können.

2) Diese berechnet sich bei dem anfangs angeführten Beispiel (vgl. Taf. II, Fig. 1) zu $100\,w' / W$.

zu reguliren, dass jener Ausschlag 1 bis 2 cm nicht überschreitet, so ist wohl für die meisten Fälle der Zuordnungsfehler als belanglos zu betrachten.

Dies ist das günstige Ergebniss der Fehlerbestimmungen.

Ich gehe jetzt dazu über, Versuche zu beschreiben, die ich zum Zwecke eines Vergleiches mit einer anderen sehr gebräuchlichen Methode, nämlich der Thomson'schen, angestellt habe.

Die Versuchsanordnung (vgl. Taf. II, Fig. 4) war im Ganzen dieselbe, wie sie schon p. 198 angegeben, nur traten noch einige neue Verbindungen hinzu, welche die Messung nach der Methode von Thomson gestatten — diese erfolgte mittels einer Doppelbrücke Siemens & Halske'scher Construction. Die ganze Einrichtung war so getroffen, dass man ohne Vermittelung von Schrauben allein vermittels einiger Quecksilbercontacte beliebig auf Einstellung und Controlle des Differentialgalvanometers oder auf Messung des Widerstandes nach einem der beiden Verfahren schalten konnte. Die Reihenfolge der Messungen war: Abgleichung des Differentialgalvanometers; Bestimmung des Widerstandes nach Thomson, mit dem Differentialgalvanometer (Uebersetzung ψ_1), nach Thomson, mittels Differentialgalvanometer (ψ_2) etc.; Controlle des Differentialgalvanometers. So wurden Temperaturschwankungen am leichtesten unschädlich gemacht.

Nach Anbringung sämmtlicher Correctionen, bezüglich der Aichung und der Temperatur, ergaben sich folgende Werthe:

A. Widerstand No. I.

a) Methode von Thomson.

	0.093726 S. E.
	0,093732 „
	0.093727 „
im Mittel	0,093728 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:300$	0,093752	S. E.
$\psi_2 = 1:500$	0,093714	„
$\psi_3 = 1:1000$	0,093748	„
im Mittel	0,093738	S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0107 Proc.

B. Widerstand No. II.

a) Methode von Thomson.

	0,050703 S. E.
	0,050649 „
	0,050738 „
	0,050696 „
im Mittel	0,050696 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:300$	0,050686 S. E.
$\psi_2 = 1:500$	0,050693 „
$\psi_3 = 1:1000$	0,050673 „
im Mittel	0,050684 S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0237 Proc.

C. Widerstand No. III.

a) Methode von Thomson.

	0,034301 S. E.
	0,034286 „
	0,034335 „
	0,034265 „
im Mittel	0,034297 S.E.

b) Differentialgalvanometer in Brückenschaltung.

$\psi_1 = 1:500$	0,034260 S. E.
$\psi_2 = 1:1000$	0,034266 „
$\psi_3 = 1:2000$	0,034292 „
im Mittel	2,034273 S.E.

Abweichung der beiden Mittelwerthe von einander 0,0759 Proc.

Zu diesen Zahlen ist noch zu bemerken, dass man den doppelseitigen Ausschlag im Galvanometer, welcher dem einzweigigen Strome entsprach, nicht über 2 cm werden liess, was weder besondere Mühe noch Zeit erforderte.

Die erreichte Uebereinstimmung ist wohl als eine sehr gute zu bezeichnen, zumal wenn man die Anhäufung auch an sich kleiner Fehler durch die vielfachen Aichungen und Calibrirungen bedenkt.

Wenn ich daher nun zu einem abschliessenden Vergleiche der beiden Methoden schreiten soll, so möchte ich diese Frage als eine rein praktische behandeln: eine solche der vorhandenen Hülfsmittel. Dann ist aber zu bedenken, dass in vielen electrotechnischen und physikalischen Laboratorien zwar ein empfindliches Differentialgalvanometer und ein Universalwider-

standskasten, selten aber ein Apparat, ja auch nur ein Normaldraht vorhanden ist, der ohne weiteres die Anwendung der Thomson-Methode (oder auch der Kohlrausch'schen, welche genauere Werthe liefern würde) gestattete. Wir können uns somit kurz dahin äussern:

Die Anwendung des Differentialgalvanometers anstatt des einfachen Galvanometers erhöht den Messbereich der Brückenmethode. Sie empfiehlt sich von dort an abwärts, wo Zuleitungs- und Uebergangswiderstände von Bedeutung werden und wird in ihrer unteren Grenze durch die gewünschte Empfindlichkeit bestimmt.

Die Anwendung des Differentialgalvanometers in Brückenschaltung verlangt ausser einem differential schaltbaren Galvanometer keine anderen Hilfsmittel, als die gewöhnliche Brückenmethode.

Der durch Abweichung von der Zuordnung entstehende Fehler ist auch bei grösseren Differenzen nicht bedeutend, kann aber ohne Complication der Messung beliebig klein gemacht werden.

Das Differentialgalvanometer in Brückenschaltung lässt sich auch in Anwendung bringen, um ganz kleine Widerstände unabhängig von allen Contact und Uebergangswiderständen zu messen.

Eine solche Anordnung, bei der die Hülfsmittel des Matthiessen und Hockin'schen Verfahrens verwendet werden, aber nur zwei Einstellungen statt vier erforderlich sind, zeigt Fig. 5, wo N ein calibrirter Draht ist. Für die Berechnung gilt $x : n = w_1 : w_2$. Bei dieser Schaltung fallen die Zuordnungsfehler praktisch gänzlich fort.

II. Abänderung der Heaviside'schen Schaltung des Differentialgalvanometers im Nebenschluss.

Für die Abgleichung von Widerständen mittlerer Grösse, speciell für die Calibrirung von Widerstandskästen, lässt sich mit Vortheil das Differentialgalvanometer in Schaltung von Fig. 6 verwenden.

Parallel zu den zu vergleichenden Widerständen r und r_2 liegen die beiden Zweige des auf Moment und Widerstand abgeglichenen Differentialgalvanometers hintereinander gegeneinander geschaltet; w ist ein einfacher Verbindungsdraht von kleinem Widerstande. Die Messung geschieht in der Weise,

dass man r_2 so lange ändert, bis bei Stromschluss keine Ablenkung der Nadel mehr erfolgt; dies sei erreicht durch den Widerstand r_2'. Sodann vertausche man zur Eliminirung kleinerer Einstellungsfehler die beiden Galvanometerzweige durch Umlegen des Commutators K_2 und erhalte r_2'', dann ist

$$r = \frac{r_2' + r_2''}{2}. \tag{3}$$

Verwendet man dies Verfahren zur Calibrirung von Stöpselrheostaten, so hat man nicht nöthig, vor Herstellung der eigentlichen Schaltung das Galvanometer abzugleichen, sondern kann sofort die endgültige Anordnung treffen, die in Fig. 6 dargestellt ist. Die Abgleichung auf Moment erfolgt durch Aufheben der Brücke w. Ist die Abgleichung geschehen, so lege man die Brücke wieder an, ziehe als r und r_2 zwei nominell gleiche Stöpselwiderstände, z. B. 2 Hunderter, überzeuge sich durch Verwendung des Commutators K_2 von ihrer annähernden Uebereinstimmung[1]) und stelle jetzt das Differentialgalvanometer so ein, dass bei Stromschluss keine Ablenkung mehr erfolgt. Dann ist die Abgleichung genau genug hergestellt, indem die noch verbleibende Differenz durch das Commutiren ausgeglichen wird.

Es wurde mit dieser Anordnung eine Calibrirung des Universalwiderstandskastens (U. W. K.) und zwar in folgender Reihenfolge vorgenommen:

$$\begin{aligned}
5000 &= 2000 + 1000 + 1000' + 1000'' + \alpha \\
2000 &= 1000 + 1000'' = \beta \\
1000 &= 1000'' + \gamma \\
1000' &= 1000'' + \delta \\
500 &= 200 + 100 + 100' + 100'' + \alpha' \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}$$

Die Correctionen α, β, γ, δ, α' ... erhielt man durch Inter- bez. Extrapolation, indem man bei dem zweiten Theile der Widerstandsbestimmung die Widerstände 1000″, 100″, 10″, die sich aus den kleinen Widerständen zusammensetzten, um einen entsprechenden Betrag, meist $^1/_2$ Proc. des ganzen, verringerte. Absichtlich wurden bei jeder Messung die Widerstände 1000″, 100″, 10″ benutzt, um möglichst viele Stöpsel zu ziehen

1) Die erhaltene Ausschläge müssen zu beiden Seiten etwa gleich sein.

und so die Stöpselfehler auszuschliessen, die für genaue Calibrirungen am allergefährlichsten sind.

Zum Vergleiche wurden die grösseren Widerstände des U. W. K. ausser mit dem Differentialgalvanometer auch nach dem Wheatstone'schen Verfahren calibrirt und zwar mittels einer von Passavant[1]) für seine „Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit" benutzten Brücke.

Die auf diesen verschiedenen Wegen erhaltenen sehr gut übereinstimmenden Resultate sind nach Reduction auf die gleiche Temperatur in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Bezeichnung des Widerstandes	Aichung mittels	
	des Differentialgalvanometers	der Brückenmethode
5000	5000,20	5000,15
2000	1999,78	1999,46
1000	999,93	999,84
1000′	999,79	999,75
1000″	1000,31	1000,20
500	500,11	500,06
200	199,95	199,96
100	100,01	100,02
100′	100,04	100,04
100″	100,03	100,01
100_1	100,03	100,02
100_2	100,04	100,02
100_3	100,04	100 02
1000_1	999,76	999,93
1000_2	999,76	999,78

III. Verwendung des Differentialgalvanometers zur galvanischen Calibrirung von Brückendrähten.

Strouhal und Barus[2]) schlugen im Jahre 1880 eine Methode zur galvanischen Calibrirung von Drähten vor, welche die genaue Abgleichung von Hülfswiderständen überflüssig machen sollte. Mit den gleichen Hülfsmitteln und derselben Zahl von Ablesungen erreicht man jedoch eine höhere Genauigkeit unter Anwendung eines von Heerwagen[3]) angegebenen Verfahrens. Ist z. B. die Zahl der Abschnitte, in denen die Calibrirung vor sich gehen soll, $n = 10$, so gibt diese Methode

1) H. Passavant, Inauguraldissertation. Leipzig 1890. Ueber eine Reproduction der Siemens'schen Quecksilbereinheit.

2) Srouhal u. Barus, Wied. Ann. **10.** p. 326. 1880.

3) Heerwagen, Zeitschr. f. Instr. **11.** p. 167 ff. 1889.

bei 19 Ablesungen noch grössere Genauigkeit, als die Strouhal-Barus'sche bei dreifacher Wiederholung, d. h. bei 54 Ablesungen.

Ich werde jetzt zeigen, dass es mit Hülfe des Differentialgalvanometers sogar möglich ist, dieselbe Genauigkeit mit nur 10 Einstellungen zu erreichen: Die betreffende Schaltung geht aus Fig. 7 hervor. Setzt man voraus, dass die Nadel des Differentialgalvanometers keine Ablenkung erfährt, wenn $k_1 i_1 = k_2 i_2$ ist, so erhält man für jene Schaltung die Bedingungsgleichung

$$(4) \qquad k_2\, x\,[W(w + g_1) - w^2] = k_1\, w\,[R\,(x + g_2) - x^2].$$

Diese Gleichung ergibt, dass einem und demselben w bei constanten Werthen g_1, g_2, R, W immer ein und dasselbe x entspricht, unabhängig von der Einstellung des Differentialgalvanometers und davon, zwischen welchen Punkten des Zweiges W oder R man die Widerstände w oder x abgreift. Man braucht demnach keine bifilar gewickelten, annähernd gleichen n Hülfswiderstände, noch ihre Versetzung mehr, sondern ist auch ohnedies im Stande, lauter Abschnitte von gleichem Widerstande aneinanderzureihen. — Zur Ausführung der Calibrirung — es sei der Draht R in n Abschnitten zu calibriren — wähle man den Widerstand w so, dass ihm ein x von etwa der Grösse R/n entspricht. Dieses x greift man zunächst von einem Verzweigungspunkte, z. B. P_0, aus ab, dann stehe der zweite Contact auf a_1; hierauf belässt man diesen Contact in seiner Stellung a_1 und grenzt mit dem anderen nach Umkehr der Stromrichtung in einem der beiden Zweige ein weiteres x, bis a_2 reichend, ab. Analog fortschreitend reiht man $n/2$ äquivalente Abschnitte aneinander, bis man in der Mitte angelangt ist — n sei der Einfachheit halber als gerade angenommen, für ungerade n sind die Aenderungen nur geringfügiger Art —; jetzt wiederholt sich dasselbe Verfahren von dem anderen Verzweigungspunkt P_{00} aus, bis man nach weiteren $n/2$ Einstellungen von neuem die Mitte erreicht hat.

Die Berechnung ist bei dieser Methode sehr einfach: Es seien die beiden Einstellungen in der Mitte $a_{n/2}$ und $a_{n'/2}$ um die Länge d gegen einander verschoben, und mögen die anderen Einstellungen a_1, $a_2 \ldots a_{n-1}$ heissen, so sind die Punkte, durch welche der Draht in

$$\frac{1}{n}\,l \text{ bez. } \frac{n-1}{n}\cdot l,\quad \frac{2}{n}\,l \text{ bez. } \frac{n-2}{n}\cdot l\,\ldots$$

getheilt wird:

$$a_1 + \frac{d}{n} \text{ bez. } a_{n-1} - \frac{d}{n}$$

$$a_2 + 2\frac{d}{n} \text{ bez. } a_{n-2} - 2\frac{d}{n}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad ,, \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_m + m\frac{d}{n} \text{ bez. } a_{n-m} - m.\frac{d}{n};$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad ,, \qquad \vdots \qquad \vdots$$

demnach betragen die Correctionen

$$\begin{array}{llllll}
\text{bei} & \frac{1}{n}\,l\ldots & \frac{1}{n}\,l - a_1 - \frac{d}{n} \\
,, & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
,, & \frac{m}{n}\,l\ldots & \frac{m}{n}\,l - a_m - m\frac{d}{n} \\
 & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
,, & \frac{n-m}{n}\,l\ldots & \frac{n-m}{n}\,l - a_{n-m} + m\frac{d}{n} \\
 & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
,, & \frac{n-1}{n}\,l\ldots & \frac{n-1}{n}\,l - a_{n-1} + \frac{d}{n}.
\end{array}$$

Setzen wir, wie dies auch für obige die anderen Methoden betreffenden Angaben geschah, voraus, dass die Empfindlichkeit der Anordnung die absolut richtige Einstellung gestattete, so ist jedes a nur mit dem Ablesungsfehler ε behaftet; nur die Differenz d wird durch zwei Ablesungen erhalten, hat demnach den Fehler $\varepsilon\sqrt{2}$.

Hieraus ergibt sich als wahrscheinlicher Fehler für die Correction bei

$$\frac{m}{n}\cdot l \text{ bez. } \frac{n-m}{n}\cdot l$$

$$(5) \qquad c_m = \sqrt{\varepsilon^2 + 2\,.\,\varepsilon^2\left(\frac{m}{n}\right)^2} = \varepsilon\sqrt{1 + 2\left(\frac{m}{n}\right)^2}.$$

Aus dieser Wurzel berechnen sich für $n = 10$ folgende Werthe (des besseren Vergleiches wegen seien die entsprechenden den anderen Verfahren angehörigen Zahlen ebenfalls angeführt):

Correction	1 u. 9	2 u. 8	3 u. 7	4 u. 6	5
Strouhal u. Barus	0,09	1,59	1,90	2,07	2,12
Heerwagen [1]	1,06 (1,03)	1,11 (1,09)	1,14 (1,12)	1,15	0,71 $\Big\} = \sqrt{\frac{1}{2}}$
Differentialgalvan.	1,01	1,04	1,09	1,15	0,71

Zur praktischen Erprobung dieses Verfahrens wurde ein Brückendraht aus Neusilber von 1 m Länge und 0,5 mm Durchmesser calibrirt, indem man parallel zu ihm den Universalwiderstandskasten (U. W. K.) schaltete. Als w zog man in einem Falle 10 S. E.; dann war, damit x etwa gleich $0{,}1\,R$ wurde, d. h. die Calibrirung in 10 Theilen erfolgte, $W = 86$ S. E. Die Correctionen der zweiten Rubrik wurden mit demselben w, aber einem etwas anderen W gewonnen, die der dritten mit $w = 20$ S. E. und $W = 182$ S. E. und mit umgekehrter Stromrichtung im Nebenzweige W, sodass eine Umsetzung von w innerhalb W eintrat, (vgl. Fig. 8).

	I.	II.	III.	Mittel
	+ 1,23 mm	+ 1,24 mm	+ 1,23 mm	+ 1,233 mm
	+ 0,67 „	+ 0,70 „	+ 0,72 „	+ 0,697 „
	+ 0,90 „	+ 0,84 „	+ 0,85 „	+ 0,863 „
	+ 0,67 „	+ 0,79 „	+ 0,75 „	+ 0,737 „
	+ 0,27 „	+ 0,37 „	+ 0,34 „	+ 0,327 „
	+ 0,34 „	+ 0,38 „	+ 0,40 „	+ 0,373 „
	− 0,24 „	− 0,19 „	− 0,23 „	− 0,220 „
	− 0,38 „	− 0,35 „	− 0,36 „	− 0,363 „
	− 0,71 „	− 0,71 „	− 0,67 „	− 0,697 „
Mitttl. Abweichg. vom Mittel:	0,0213 mm	0,0147 mm	0,0304 mm	0,0220 mm

Als derselbe Draht nach dem Verfahren von Heerwagen, bez. Strouhal-Barus calibrirt wurde, erhielt man folgende Werthe als mittlere Abweichungen vom Mittel:

Heerwagen	0,028 mm	0,027 mm	0,027 mm	0,027 mm
Strouhal-Barus	0,024 „	0,034 „	0,036 „	0,031 „

Das günstigste Resultat wurde, wie man sieht, bei der Verwendung des Differentialgalvanometert beobachtet.

Wir können somit die Ergebnisse dieses Abschnittes dahin zusammenfassen:

1) Heerwagen, l. c. p. 167.

Die in Fig. 7 dargestellte Schaltung des Differentialgalvanometers gestattet dessen Verwendung, auch ohne dass es auf Moment oder Widerstand abgeglichen ist, setzt daher kein Differentialschaltung zulassendes Galvanometer voraus; macht das Vorhandensein von n Hülfswiderständen und ihre Vertauschung unnöthig; gibt bei n Ablesungen eine noch etwas höhere Genauigkeit, als die Methode von Heerwagen bei 2n —, eine weit grössere, als die Methode von Strouhal-Barus bei 2n — 2 Einstellungen; ermöglicht es, die Aequivalentlängen von einem beliebigen Anfangspunkt aus abzugreifen und aneinanderzureihen; lässt endlich eine sehr einfache Berechnung der Correctionen zu; verlangt dagegen statt eines einzigen zwei Contacte.

IV. Galvanische Calibrirung von dickeren Drähten oder Stäben mittels des Differentialgalvanometers.

Bei der Calibrirung von dickeren Drähten oder Stäben, z. B. der zur Messung kleiner Widerstände dienenden Normaldrähte grösseren Durchmessers, handelt es sich selten darum, eine in ihren Endpunkten festgelegte Drahtlänge in gleiche Widerstandstheile zu zerlegen, sondern den relativen Widerstand der mittleren Abschnitte eines längeren Drahtes oder Stabes zu bestimmen. In diesem Falle wird man sich mit grossem Vortheil der von Braun[1]) eingeführten Schneiden von constantem Abstande bedienen und zwar in Verbindung mit dem Differentialgalvanometer.

Dieses ist hier in zwei Schaltungen anwendbar, nämlich:

1. als Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Parallelschaltung der Widerstände), welche Schaltung schon oben (vgl. p. 204 angegeben ist (vgl. Fig. 7);

2. als Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Hintereinanderschaltung der Widerstände) (vgl. Fig. 9).

Keine der beiden Methoden verlangt, solange die zu vergleichenden Widerstände gegen den des Galvanometers klein sind, was hier immer der Fall, dessen Einstellung, sei es auf Moment, sei es auf Widerstand.

Für Verfahren 1 ergibt sich nämlich aus Gleichung (4),

---

1) Braun, Centralz. für Opt. u. Mechan. 4. p. 134. 1883.

dass, wenn w^2 gegen $W(w + g_1)$ und x^2 gegen $R(x + g_2)$ vernachlässigt werden dürfen, folgende Beziehung besteht:

$$x = \frac{k_1 w \,.\, R(g_2 + x)}{k_2 W(w + g_1)}.$$

Dann ist mit einer zweiten Vereinfachung

$$(6) \qquad x = \left(\frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{R}{W}\right) \cdot w\,,$$

d. h. man darf den Widerstand x — für keine Aenderungen dem Widerstande w proportional setzen.

Der experimentelle Nachweis hierfür ergab sich in folgender Weise: Es wurde ein Neusilberdraht von 5 mm Dicke, der bei 50 cm Länge ca. 0,01 Ω Widerstand hatte, in 10 Abschnitten calibrirt. Zu diesem Zwecke befestigte man an einem Holzklotze in einem Abstande von 5 cm zwei Messingschneiden und löthete an diese die Verbindungsdrähte an, die zu einem Zweige des Differentialgalvanometers führten. Die sonstige Anordnung ist aus Fig. 10 ersichtlich; durch Regulirung des Widerstandes W vermittels $W K_1$ war erreicht worden, dass der Contact C ca. 50 cm auf dem Brückendrahte (vgl. p. 206) abgrenzte — eine Calibrirung des Brückendrahtes ist für diesen Zweck im allgemeinen unnöthig —, sodass der Ablesungsfehler gegen diese Länge vernachlässigt werden konnte.

Man stellte zwei Versuchsreihen an:

A. Der Draht N wurde bei vollständig abgeglichenem Galvanometer calibrirt, d. h. etwa:

$$k_1 = k_2\,,\ g_1 = g_2\,;$$

sodann wurde in einem Zweige eine Widerstandsänderung um etwa 5 Proc. vorgenommen, d. h. es war:

$$k_1 = k_2\,,\ g_1 \text{ ca.} = 0{,}95\, g_2\,.$$

Columne 1 und 2 unter A. geben die beobachteten Werthe wieder.

B. Die eine Rolle des Galvanometers wurde um etwa 1 cm aus der Stellung gleichen Momentes verrückt, und bei dieser neuen Stellung wurden wiederum zwei Calibrirungen vorgenommen: die erste mit gleichem Widerstand beider Zweige

$$k_1 = v\, k_2\,,\ g_1 = g_2\,;$$

die zweite mit

$$k_1 = v\, k_2\,,\ g_1 \text{ ca.} = 0{,}95\, g_2\,.$$

Die beiden Columnen unter B. stellen das Ergebniss dieser Beobachtungen dar.

A.		B.	
1	2	1	2
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0032	1,0030	1,0035	1,0033
0,9980	0,9979	0,9991	0,9989
1,0066	1,0064	1,0068	1,0068
1,0171	1,0177	1,0174	1,0174
1,0002	1,0005	1,0002	1,0002
1,0029	1,0030	1,0033	1,0030
0,9981	0,9980	0,9983	0,9981
1,0176	1,0180	1,0166	1,0165
1,0266	1,0267	1,0266	1,0265

Die Uebereinstimmung der einander entsprechenden Werthe tritt deutlich zu Tage, somit bilden die Versuche thatsächlich eine Bestätigung der Behauptung:

Die Calibrirung ist unabhängig von der Einstellung des Differentialgalvanometers, sofern diese während der Dauer des Versuches constant bleibt.

Für die andere, auf p. 207 unter 2 erwähnte Schaltung ergeben sich bei den Galvanometerwiderständen g_1 und g_2, den galvanometrischen Constanten k_1 und k_2 folgende Beziehungen (Fig. 9):

$$\frac{k_1 x}{x + g_1} = \frac{k_2 w}{w + g_2}$$

$$x = \frac{k_2 g_1 w}{k_1 g_2 + (k_1 - k_2) w},$$

und, sobald man $(k_1 - k_2) w$ gegen $k_1 g_2$ vernachlässigen darf,

$$x = \frac{k_2}{k_1} \cdot \frac{g_1}{g_2} w = \text{const.}\, w\,. \tag{7}$$

Da $k_1 - k_2$ und w / g_2 hier immer klein sind, so ist auch jene Bedingung wohl immer erfüllt, d. h. w ist den Aenderungen von x proportional.

Um auch letzere Methode experimentell zu untersuchen, wurde ein Kupferstab von 4,0 mm Durchmesser und 90 cm Länge in neun Abschnitten nach obigem und nach diesem Verfahren mit Hülfe desselben Brückendrahtes (vgl. p. 206) calibrirt, wobei man für die relativen Widerstände der einzelnen Abschnitte nachstehende Werthe erhielt:

Abschnitt	Verfahren 1	Verfahren 2
1	1,0000	1,0000
2	1,0012	1,0008
3	1,0015	1,0007
4	0,9974	0,9974
5	0,9979	0,9974
6	1,0011	1,0019
7	1,0009	1,0007
8	1,0014	1,0009
9	1,0018	1,0020

Mit Rücksicht darauf, dass der absolute Widerstand eines solchen Abschnittes etwa $^1/_{7000}$ Ω betrug, sind die Differenzen, die im Mittel 0,00043, d. h. 0,00000006 Ω ausmachen, als äusserst gering anzusehen. Es darf daher auch die Anwendbarkeit dieses Verfahrens als bewiesen gelten.

Für die Entscheidung der Frage, welche von beiden Schaltungen man vorziehen soll, ist die Erwägung von grosser Wichtigkeit, dass Temperaturschwankungen bei dem letzteren Verfahren (ebenso bei dem Kirchhoff'schen) bedeutendere Fehler hervorzubringen vermögen, wenn man nicht die nöthigen Controlleinstellungen macht. Denn während der Galvanometerdraht aus Kupfer besteht, sind die Uebersetzungswiderstände meist aus einem Material mit geringem Temperaturcoefficienten hergestellt. Es wird also eine Aenderung der Temperatur um nur 0,1° C. eine Uebersetzung von etwa 1:10 schon um $^1/_{25}$ Proc. beeinflussen.

Deshalb wird sich meist die Anwendung des durch Fig. 10 verdeutlichten Verfahrens empfehlen. Es gibt wohl kein anderes, das gleich bequem, schnell und mit gleich geringen Hülfsmitteln die genaue Calibrirung dickerer Drähte oder Stäbe gestattet.

V. Die Empfindlichkeit der gebräuchlichen Widerstandsmessmethoden.

In Folgendem mögen zunächst die für die Empfindlichkeit der gebräuchlicheren Widerstandsmessmethoden gültigen Formeln — dieselben sind zum Theil schon bekannt — mitgetheilt werden. Die Zusammenstellung hat den Hauptzweck, einen bequemen Vergleich der unter gegebenen Umständen mit verschiedenen Methoden erreichbaren Empfindlichkeit zu gestatten, und war es daher wesentlich, die veränderte Schal-

tung oder Wahl der Spulen eines und desselben Galvanometers in einfacher Weise in die Formeln einzuführen.

Der Kürze halber sind nur die vereinfachten Formeln mitgetheilt, zumal die allgemeinen für den praktischen Gebrauch vielfach zu umständlich sind; die Specialisirung besteht zumeist darin, dass der Widerstand entweder des Batteriezweiges oder der eigentlichen Messcombination gegen den Gesammtwiderstand vernachlässigt sind.

Methode	Empfindlichkeitsgleichung	Voraussetzung
	Brücke	
Wheatstone'sche Brücke (Fig. 11)	$\delta' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{1}{r + r_3 + g\,(1 + \psi)}$ (8 a) $\delta'' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{g\,(1 + \psi) + r + r_3} \frac{r_3}{r + r_3}$ (8 b)	ϱ wird vernachlässigt r sowie $\frac{r}{\psi}$ klein gegen ϱ
Thomson'sche Doppelbrücke (Fig. 12)	$\delta'' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{\varrho}{r} \frac{1}{g\,(1 + \psi) + 2\, r_3}$ (9 b)	Messung kleiner Widerstände
	Differentialgalvanometer	
Brückenschaltung (Fig. 13)	$\delta' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{1}{g\,(1 + \psi) + r + r_3}$ (10 a)	Es bleiben x'' gegen g, ϱ und x' unberücksichtigt; $r = \psi\, r_2$
Schaltung von Heaviside (Fig. 14)	$\delta' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{1}{2\,(g + r)}$ (11 a) $\delta_1' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{1}{2\, r}$ (11 aa) $\delta'' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{g}$ (11 b)	$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 0$ $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 0$; r gross gegen g r klein gegen g und ϱ
Schaltung von Kirchhoff (Fig. 15)	$\delta' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{\psi}{1 + \psi} \frac{1}{\sqrt{(g' + r)^2 + (g'' + r)^2}}$ (12 a) $\delta'' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g''^2}}$ (12 b)	$\varrho = 0$ ϱ allein bestimmt die Hauptstromstärke
Ursprüngliche Schaltung (Fig. 16)	$\delta' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{r}{(g + r)^2}$ (13 a) $\delta_1' = (\alpha\, k)\, E \frac{d\, r}{r} \cdot \frac{1}{r}$ (13 aa)	ϱ wird vernachlässigt ϱ wird vernachlässigt; ϱ gross gegen g

In der Tabelle sind der besseren Uebersicht wegen durchgehends folgende Bezeichnungen verwandt worden:

r für den unbekannten Widerstand;

ψ für sein Verhältniss zum Normalwiderstande (Uebersetzungsverhältniss);

dr/r für die relative Aenderung der Abgleichung;

k für die Ablenkung, welche die eine Spule durchfliessende Stromeinheit im Galvanometer hervorbringt;

α für eine von der Spulenschaltung abhängige Zahl (vgl. u.);

δ für die thatsächliche Gesammtablenkung der Galvanometernadel.

Alle anderen Bezeichnungen gehen aus den Figuren deutlich hervor.

Zu dieser Tabelle ist noch ergänzend zu bemerken, dass für die in Fig. 6 dargestellte Schaltung des Differentialgalvanometers, sowie für den übergreifenden Nebenschluss (Fig. 17) dieselben Formeln wie für die Heaviside'sche Schaltung gelten, unter den Annahmen, dass bei ersterem Verfahren $2w/g + r = 0$ gesetzt, bei letzterem ϱ_1 gegen ϱ vernachlässigt werden darf. Ferner mag noch darauf hingewiesen werden, dass, sobald der Widerstand der Messcombination gegen den des Batteriezweiges klein ist, die Empfindlichkeit bei allen Verfahren dem absoluten Werthe dr der Abgleichungsänderung und dem Ausdrucke E/ϱ, d. h. der Messstromstärke, proportional wächst, was auch leicht verständlich ist. —

Der Factor α, der in allen diesen Formeln als eine galvanometrische Constante wiederkehrt, ermöglicht es, die Empfindlichkeit für die verschiedensten Schaltungen der Galvanometerspulen zu vergleichen. Die Entscheidung über seine Grösse gründet sich darauf, dass, wenn n_1, n_2, n_3, n_4 die Windungszahlen der vier Spulen, $i_1 \ldots i_4$ die letzteren durchfliessenden Ströme und $c_1 \ldots c_4$ galvanometrische Constanten sind,

$$\delta = c_1 n_1 i_1 + c_2 n_2 i_2 + c_3 n_3 i_3 + c_4 n_4 i_4$$

wird. Setzt man der Einfachheit halber $c_1 n_1 = c_2 n_2 = \ldots = c n = k$, wo k die gleiche Bedeutung hat wie oben, *so ist α allgemein gleich der Zahl der hintereinandergeschalteten Abtheilungen.*

Der Beweis hierfür ergibt sich daraus, dass für jede aus b

parallel geschalteten Spulen bestehende Abtheilung der Constanten α eine Einheit überwiesen werden muss, indem der in dieser Abtheilung verlaufende Strom die Ablenkung

$$c \cdot \frac{i}{b} \cdot b\,n = 1 \cdot i\,k$$

hervorruft. Befinden sich a Abtheilungen hintereinander, so ist $\delta = a\,i\,k$ und $\alpha = a$.

Um experimentell darzuthun, dass man mit Hülfe obiger Tabelle die Empfindlichkeit verschiedener Methoden in einfacher Weise vergleichen kann, wurden die Ausschläge beobachtet, die man bei Aenderung der Abgleichung der Widerstände 5000, 1000, 100 und 10 S. E. um 1 Proc. erhielt unter Anwendung

a) des Differentialgalvanometers in ursprünglicher Schaltung (13a);

b) des Differentialgalvanometers in Schaltung von Fig. 6 (11a);

c) der Wheatstone'schen Brücke (8a).

Bei a) und b) bestand jeder Zweig aus zwei parallel geschalteten Spulen ($\alpha = 1$; $g = 200$); bei c) waren einmal alle Spulen (c_1) parallel ($\alpha = 1$; $g = 100$), sodann nur je zwei Spulen (c_2) parallel ($\alpha = 2$; $g = 400$); immer waren $r_3 = 100$, $\psi = 1$ und ϱ zu vernachlässigen. Um einen Vergleich zwischen beobachteten und berechneten Resultaten zu ermöglichen, sind die für $r = 5000$ S. E. nach Methode a) erhaltene Ablenkung (5,23 cm) und der aus $\alpha r / (g + r)^2$ berechnete Werth $1 \cdot 5000 / (200 + 5000)^2$ gleich 1 gesetzt, und auf diese Einheiten die berechneten und beobachteten Ablenkungen bezogen. In der Tabelle selbst stehen der grösseren Uebersichtlichkeit wegen nur diese Verhältnisszahlen.

Widerstand	Methode a		Methode b		Methode c			
					c_1		c_2	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
5000	1	1	0,522	0,520	0,51	0,508	0,92	0,908
1000	3,76	3,75	2,25	2,26	2,08	2,07	2,85	2,84
100	6,02	6,08	8,98	9,04	6,77	6,89	5,42	5,42
10	1,23	1,23	12,9	12,9	8,73	8,82	5,96	6,20

Die Uebereinstimmung tritt deutlich zu Tage. —

Wir wollen jetzt auf den günstigsten Galvanometerwiderstand eingehen, behufs Ableitung einer einfachen, für die meisten Widerstandsmessungen gültigen Regel.

Zu diesem Zwecke mag zunächst der Einfluss der Spulenschaltung bei Verwendung des einfachen Galvanometers besprochen werden. Es lässt sich nämlich zeigen, dass von allen möglichen Schaltungen für die grösste Empfindlichkeit nur in Betracht kommen:

Hintereinanderschaltung aller Spulen ($\alpha = 4$; $g = 4\gamma$, wenn γ den Widerstand einer Spule bedeutet); Parallelschaltung aller Spulen ($\alpha = 1$; $g = \gamma / 4$); Parallelschaltung je zweier Spulen ($\alpha = 2$; $g = \gamma$). Zum Nachweise schreiben wir die Gleichungen für Brücke und Doppelbrücke in der Form:

$$\delta = (c_1\, n) \frac{c\,\alpha}{a\,g + b}, \tag{14}$$

in der c_1 eine Constante, n die Windungszahl einer Spule, a, b und c Functionen der Widerstände, mit Ausnahme von g, sind. δ wird also um so grösser, je kleiner g im Verhältniss zu α ist. Wir brauchen somit nur diejenigen Schaltungen in Betracht zu ziehen, die für ein und dasselbe α den kleinsten Werth von g aufweisen; diese sind a) $\alpha = 1$, $g = \gamma / 4$; b) $\alpha = 2$, $g = \gamma$; c) $\alpha = 4$, $g = 4\gamma$ und endlich d) $\alpha = 3$, $g = 2{,}5\,\gamma$. (Drei Abtheilungen, von denen die eine aus zwei parallel geschalteten Spulen besteht.)

Der weitere Nachweis beschränkt sich somit darauf, zu zeigen, dass Schaltung d) niemals vortheilhafter ist als b) oder c), oder, wenn wir die betreffenden Werthe für α und g einsetzen, dass

$$\frac{1}{a\,.\,\gamma + \frac{b}{4}} \lesseqgtr \frac{1}{a\,.\,\frac{2{,}5\,\gamma}{3} + \frac{b}{3}} \lesseqgtr \frac{1}{a\,.\,\frac{\gamma}{2} + \frac{b}{2}}.$$

Setzt man $a\,.\,\gamma = (1 \pm \delta)\, b\, 2$, so erhält man thatsächlich

$$9 \pm 6\,\delta \lesseqgtr 9 \pm 5\,\delta \lesseqgtr 9 \pm 3\,\delta.$$

Die Behauptung ist also bewiesen; sie gewinnt erhöhte Wichtigkeit, wenn man bedenkt, dass es, vom Einfluss der Isolation abgesehen, gleichgültig ist, ob man den günstigsten Widerstand durch veränderte Schaltung der gleichen oder durch Wahl anderer Rollen herstellt.

Wir leiten nunmehr die Formeln für den günstigsten Widerstand des Galvanometers — gerade die Wahl dieses Widerstandes steht in der Praxis meist offen, während die

übrigen häufig durch andere Umstände bedingt werden — allgemein für alle Empfindlichkeitsgleichungen ab, die nach Gleichung (14) gebildet sind, indem wir setzen für $n \dots n\lambda$; für $g \dots g\lambda^2$ und den Maximalwerth von λ suchen für

$$\frac{n\lambda . c}{a g \lambda^2 + b}.$$

Dieser ist

$$\lambda = \sqrt{\frac{b}{a g}}.$$

Soll dann $\lambda = 1$ werden, d. h. die vorliegende Schaltung die günstigste sein, so wird der günstigste Widerstand

(15) $$g_0 = \frac{b}{a}.$$

Die maximale Empfindlichkeit δ_0 ergibt sich mit Hülfe der Beziehungen

$$g = \frac{n . d_m . \pi}{\varrho . q}; \quad n\, d_m\, \pi . q = \text{const.} = V.$$

Hieraus

$$n = \sqrt{g} . \frac{\sqrt{\varrho V}}{d_m \pi}$$

und

(16) $$\delta_0 = \frac{\tau_m}{2 d_m \pi} . \sqrt{\varrho V} \frac{d r}{r} E . \frac{c}{\sqrt{a b}} = K \frac{d r}{r} E . \frac{c}{\sqrt{a b}},$$

wo bedeuten:

τ_m die Ablenkung, welche die in der mittleren Wendung (Durchmesser d_m) fliessende Stromeinheit im Galvanometer bewirkt;

n die Gesammtwindungszahl[1] ($n \tau_m = \alpha k$);

V, ϱ, q Gesammtvolumen, Leitungsfähigkeit und Querschnitt des Kupfers;

a, b, c die den Empfindlichkeitsformeln zu entnehmenden Functionen der Widerstände;

K eine galvanometrische Constante, die bei Verwendung des Galvanometers in Differentialschaltung durch $K / \sqrt{2}$ ersetzt werden muss (da aus V der Werth $V/2$ wird). Mit

1) Parallelschaltung von Spulen drückt sich durch Vervielfachung des Querschnittes und Verminderung der Windungszahl aus.

Hülfe dieser Gleichungen können wir jetzt für die verschiedenen Methoden die Werthe von g_0 und δ_0 zusammenstellen, wobei der Kürze halber nur die wichtigen Formeln angeführt werden mögen.

Methode	Formel		Voraussetzung
	Brücke		
Wheatstone'sche Brücke	$g_0 = \frac{r + r_3}{1 + \psi}$	(17)	allgemein gültig
	$\delta_0' = K \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{\psi}{\sqrt{(1+\psi)^3 (r + r_3)}}$	(17a)	$\varrho = 0$
	$\delta_0'' = K \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{r_3}{r + r_3} \frac{1}{\sqrt{(1+\psi)(r+r_3)}}$	(17b)	ϱ ist sehr gross
Thomson'sche Doppelbrücke	$g_0 = \frac{r + 2\,r_3}{1 + \psi}$	(18)	allgemein gültig
	$\delta_0'' = K \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{r}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{(1+\psi)\,2\,r_3}}$	(18b)	Messung kleiner Widerstände
	Differentialgalvanometer		
in Brückenschaltung	$g_0' = \frac{r + r_3}{1 + \psi}$	(19')	ϱ und x', ebenso x'' gegen g werden vernachlässigt
	$\delta_0' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot K \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{\psi}{\sqrt{(1+\psi)^3 (r + r_3)}}$	(19b)	
im Nebenschluss	$g_0' = r$	(20')	$\varrho = 0$
	$\delta_0' = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{1}{2\sqrt{r}}$	(20a)	
	$g_0'' = 3\,r$	(20b)	r ist klein gegen ϱ
in ursprünglicher Schaltung	$g_0 = \frac{r}{3}$	(21)	allgemein gültig
	$\delta_0' = \frac{K}{\sqrt{2}} \frac{d\,r}{r} E \cdot \frac{\sqrt{27}}{8\sqrt{r}}$	(21a)	$\varrho = 0$

Zu dieser Tabelle muss noch bemerkt werden, dass die für die Heaviside'sche Schaltung gegebenen Werthe unter den schon früher erwähnten Bedingungen auch für den über-

greifenden Nebenschluss und die Schaltung von Fig. 6 gültig sind, dass endlich die für die ursprüngliche Schaltung gültigen Formeln mittels Gleichung (15) und (16) nicht abgeleitet werden können.

Eine Interpretation der in dieser Tabelle für den günstigsten Widerstand gefundenen Ausdrücke führt unter Berücksichtigung anderer bisheriger Resultate zu dem Satze:

Für die Brückenmethode (mit einfachem Galvanometer und Differentialgalvanometer), für die Doppelbrücke und für sämmtliche Schaltungen, in denen das Differentialgalvanometer im Nebenschluss verwandt wird, gewährt dasjenige Galvanometer resp. Differentialgalvanometer bei sonst gleicher Widerstandscombination die grösste Empfindlichkeit, dessen Widerstand gleich dem Gesammtwiderstande der mit ihm parallel verlaufenden Zweige gewählt ist. Ob man diesen Widerstand durch Wahl anderer Rollen von congruentem Wickelungsraum und gleichem Kupfergewichte oder durch verschiedene Schaltungsarten an einem und demselben Rollenpaare herstellt, ist gleichgültig. In letzterem Falle kommen bei Verwendung des einfachen Galvanometers nur in Betracht: Hintereinanderschaltung aller Spulen, Parallelschaltung aller Spulen und Parallelschaltung je zweier Spulen.

Diese Regel mag noch mit wenigen Worten erläutert werden:

Für die Brückenmethode, verlangt sie, soll (vgl. Fig. 11)

$$\frac{1}{g_0} = \frac{1}{r + r_3} + \frac{1}{r_2 + r_4}$$

sein; dies entspricht der Schwendler'schen[1]) und der oben abgeleiteten Regel

$$g_0 = \frac{r + r_3}{1 + \psi}.$$

In der Doppelbrückenschaltung laufen mit dem Galvanometer die Zweige $r_3 \, r \, r_3$ und $r_3 / \psi \, r / \psi \, r_3 / \psi$ parallel, demnach soll (vgl. Fig. 12)

$$\frac{1}{g^0} = \frac{1}{2 r_3 + r} + \frac{\psi}{2 r_3 + r}$$

sein, wie auch die Formel verlangt.

Verwendet man das Differentialgalvanometer im Neben-

1) Schwendler, Pogg. Ann. 130. p. 574. 1867.

schluss, so fordert obige Regel, dass $g_0 = r$ sei. Dies ist identisch mit (20′) und kommt praktisch auf dasselbe hinaus, wie die für die Messung kleiner Widerstände erhaltene Regel, (20b) dass man $g_0 = 3r$ d. h. so klein, als irgendwie erlaubt, wählen möge.

Aus diesen für die Empfindlichkeit abgeleiteten Beziehungen lassen sich mannigfache weitere Schlussfolgerungen ziehen:

Wir könnten z. B. leicht die Frage entscheiden, ob für die Calibrirung von Widerstandskästen die einfache Wheatstone'sche Methode oder das Differentialgalvanometer im Nebenschluss (Fig. 6) empfindlicher ist; *und zwar würde sich in diesem Falle die Verwendung des Differentialgalvanometers als empfehlenswerther erweisen.*

Eine wichtigere Ueberlegenheit, die wir daher auch genauer besprechen wollen, zeigt das Differentialgalvanometer für die Messung kleiner Widerstände. Dies wird deutlich hervorgehen, wenn wir schreiben

$$\delta_0 = \left(K.\frac{dr}{r}E\frac{r}{\varrho}\right)\frac{c}{a\sqrt{g_0}} = F.\frac{c}{a\sqrt{g_0}}$$

und einführen (vgl. p. 215)

$$n\tau_m = ak = \frac{2K}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{g}.$$

Mit Hülfe dieses Ausdruckes erlangt Gleichung (11b) die Gestalt

$$\delta'' = F.\sqrt{\frac{2}{g}}$$

(Differentialgalvanometer im Nebenschluss), und Gleichung (12b)

$$\delta'' = F.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{g'^2+g''^2}{g}}}$$

(Kirchhoff), wo g den Widerstand einer Galvanometerhälfte für sich, g' und g'' dasselbe wie früher bedeuten.

Hierzu kommt (Gleichung 18b)

$$\delta_0'' = F.\frac{1}{(1+\psi)\sqrt{g_{01}}} \quad \text{(Thomson).}$$

Die Eigenart der Methode gestattet es, beim übergreifenden Nebenschluss und dem Kirchhoff'schen Verfahren g sehr klein zu nehmen, g' und g'' wird man, soweit angängig, nahe gleich

g wählen, während $g_{01} = 2\, r_3 / 1 + \psi$ sich nach der Grösse des Uebersetzungsverhältnisses und des kleinsten Uebersetzungswiderstandes richtet, der jedenfalls nicht weniger als ca. 10 Ω betragen sollte, damit die Uebergangswiderstände die Uebersetzung nicht beinflussen.

Es lässt also bei der Messung kleiner Widerstände das Differentialgalvanometer im Nebenschluss grössere Empfindlichkeit zu, als die Thomson'sche Doppelbrücke, und zwar steht in erster Reihe das Kohlrausch'sche, in der zweiten das Kirchhoff'sche Verfahren.

Auf Grund dieses Ergebnisses und eines Vergleiches der Formeln (8a), (11a), (13a) lässt sich dieser Satz mit Gültigkeit für die beiden hier zumeist behandelten und praktisch wichtigen Specialfälle, dass der Widerstand des Batteriezweiges entweder zu vernachlässigen oder allein maassgebend ist für den Gesammtwiderstand, noch wie folgt verallgemeinern:

Bei der Abgleichung von Widerständen beliebiger Grösse erreicht man unter Verwendung der jedesmaligen günstigsten Galvanometerwiderstände mit Hülfe des Differentialgalvanometers eine grössere Empfindlichkeit, als mit der Brücke oder ihrer Abart der Doppelbrücke.[1])

Diese Beispiele mögen genügen, um die Verwendbarkeit der beiden Empfindlichkeitstabellen zu verdeutlichen.

1) Vgl. auch G. Wiedemann, Die Lehre von der Electricität. p. 462. 1882.

9. *Selbstthätige Blutgaspumpe; von* **A. Kossel** *und* **A. Raps.**

Die grossen Vortheile, welche die Anwendung einer selbstthätig arbeitenden Quecksilberluftpumpe bei der Bestimmung der im Blute und in anderen Flüssigkeiten enthaltenen Gase bietet, veranlassten uns, die in dieser Zeitschrift [1]) angegebene selbstthätige Quecksilberluftpumpe auch für derartige Zwecke anwendbar zu machen. [2])

Die hier auseinandergesetzte Vorrichtung macht die mechanischen Handleistungen und die Anwesenheit des Experimentators vollständig entbehrlich; derselbe braucht nur die zu entgasende Flüssigkeit in die zuvor von der Pumpe selbstthätig evacuirten Räume einzulassen. Die Pumpe sammelt dann die Gase selbstthätig in einer Glaskugel auf, aus welcher dieselben nach vollendeter Entgasung des Blutes nur in ein Eudiometergefäss geschafft zu werden brauchen.

Da die Theile der Blutgaspumpe, welche das selbstthätige Heben des Quecksilbers und die Evacuirung besorgen, vollständig mit denjenigen der früher beschriebenen Quecksilberluftpumpe übereinstimmen, so werden sie hier nicht mehr auseinandergesetzt, sondern es wird hinsichtlich derselben auf die soeben erwähnte Abhandlung verwiesen. Hier sollen nur die Vorrichtungen beschrieben werden, welche zum Aufsammeln und Trocknen der ausgepumpten Gase dienen; ferner die Räume, in welche die zu entgasenden Flüssigkeiten eingeleitet werden.

Fig. 1 stellt die Vorrichtung zum selbstthätigen Heben des Quecksilbers dar, Fig. 2 (theilweise durchschnitten) die Blutgaspumpe selbst. Die beiden Figuren gehören eigentlich zusammen, sie sind nur der leichteren Uebersicht wegen ge-

1) A. Raps, Wied. Ann. **43.** p. 629. 1891.

2) Blutgaspumpen, bei welchen das Geschäft des Quecksilberhebens schon wesentlich erleichtert ist, aber doch der Experimentator beständig zugegen und aufmerksam sein muss, haben H. Kronecker Zeitschr. f. Instr. 1889, p. 280 u. H. Hüfner, Wied. Ann. **1.** p. 629. 1877 beschrieben.

trennt angegeben. (Man muss sich das Rohr *h* der Glaspumpe als Fortsetzung des in Fig. 1 gezeichneten Rohres *h* denken.) Fig. 2 ist vollständig identisch mit der in Fig. 2 der eben erwähnten Abhandlung gezeichneten Glasluftpumpe, bis auf die Theile, welche an das Gefäss *S* angesetzt sind. Auf die etwa

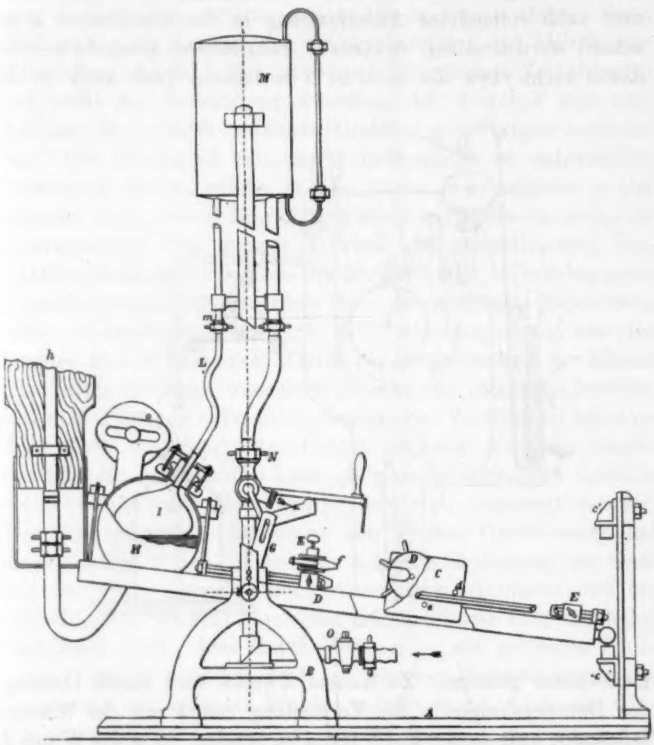


Fig. 1.

$^1/_4$ l fassende abgeplattete Glaskugel *S* ist ein Dreiwegehahn *s* aufgesetzt, welcher die Kugel sowohl mit der Wasserluftpumpe (durch das Rohr *s''*), als auch mit dem Auslassrohr *s'* zu verbinden gestattet. Das Rohr *s* ist in das weitere Gefäss *Y* in der aus Fig. 2 zu ersehenden Weise eingeschmolzen.

Es soll nun angenommen werden, dass die Pumpe (Fig. 2)

die mit ihr verbundenen Räume *u*, *v'*, *v* so weit als nöthig leer gepumpt habe und der Dreiwegehahn *s* so gestellt sei, dass *S* und *s'* durch *s''* mit der Wasserluftpumpe in Verbindung stehen. Dann herrscht in *S* ein Luftdruck, welcher der Tension des Wasserdampfes bei der jeweiligen Temperatur gleichkommt. Da die Blutgase aber nachher in dem Raume *S* aufgesammelt und nach vollendeter Aufsammlung in das Eudiometer *Z* geschafft werden sollen, so muss *S* ganz luftleer gemacht werden, damit nicht etwa die noch in *S* enthaltene Luft auch in das

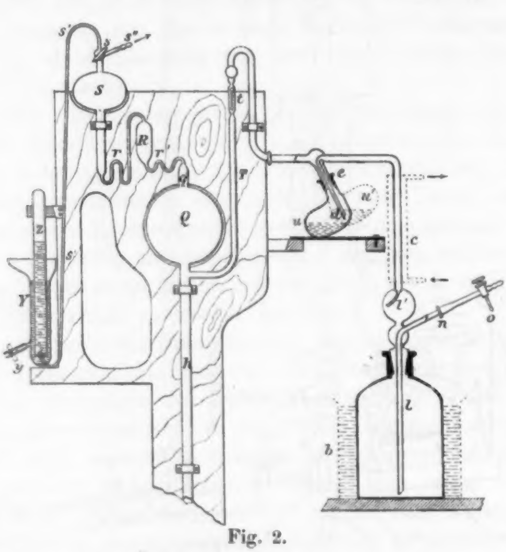


Fig. 2.

Eudiometer gelange. Zu diesem Zwecke wird durch Drehung des Dreiwegehahnes *s* die Verbindung von *S* mit der Wasserluftpumpe aufgehoben und *S* mit *s'* verbunden, dann die Wippe *D* der Pumpe mit dem Fusse oder einem untergeschobenen Brette so lange festgehalten, bis das Quecksilber *S* ganz erfüllt und die Luft durch *s'* herausgedrängt hat.[1]) Nunmehr wird die

1) Man sperrt die Wasserleitung passend in dem Augenblicke ab, in welchem das Wasser bis an das Ende des Wasserstandrohres am Luftcompressor gestiegen ist. Der dann vorhandene Druck genügt, um das Quecksilber überzutreiben.

Wippe losgelassen. Das Eudiometerrohr ist während dieser Zeit selbstverständlich noch nicht in *Y* eingesetzt. Nachdem nun die Luft aus *S* entfernt ist, sperrt man durch eine achtel Drehung des Hahnes *s*, *s'* gegen *S* ab, füllt *Y* ganz mit Quecksilber an und taucht das ebenfalls mit Quecksilber gefüllte Eudiometerrohr *Z* ganz in *Y* ein, indem man darauf achtet, dass *Z* über dem herausragenden Ende von *s'* steht. Dann lässt man nach Lösung des Quetschhahnes *f* das überflüssige Quecksilber durch *Y* (bis zu dessen Einmündestelle) ablaufen und stellt die Verbindung zwischen der Kugel *S* und dem Auslassrohr *s'* durch passende Drehung des Hahnes *s* wieder her. Die Pumpe ist nun zur Aufnahme der zu entgasenden Flüssigkeit bereit, welche in das grosse Schaumgefäss *v* eingelassen wird, dessen Einrichtung aus der Zeichnung genügend hervorgeht.[1]) Ein grosser Vortheil der selbstthätigen Einrichtung besteht darin, dass die Räume *v* und *v'* beliebig gross gemacht werden können, ohne dass die Mühe des Experimentators dadurch vermehrt wird; die Entleerung nimmt nur eine längere Zeit in Anspruch. Durch die Vergrösserung der Räume wird nicht nur eine schnellere Abgabe der Blutgase bewirkt, die nach Pflüger bekanntlich von grosser Wichtigkeit ist, sondern auch die Gefahr des Ueberschäumens erheblich herabgesetzt. An den Schliff *n* kann ein passend gebohrter Hahn *o*, ein Geppert'scher Messapparat oder dgl. angesetzt werden. Das Schaumgefäss *v* hat einen sehr grossen Durchmesser und einen flachen Boden, damit eine schnelle Entleerung der Gase aus der dünn ausgebreiteten Blutschicht stattfindet und ein Einschliessen von Gas durch das eingetrocknete Blut möglichst vermieden wird. Das Gefäss *v* kann in ein grösseres *l* eingesetzt werden, welches noch zu weiterer Beschleunigung der Entgasung mit warmem Wasser gefüllt wird. Auch ein Liebig'scher Kühler *c* kann angebracht werden, welcher ein zu schnelles Eintrocknen des Blutes verhindern soll.

Eigenthümlich angeordnet ist das Trockengefäss *u*. Dasselbe ist in einem schräg gestellten Zapfen *d* luftdicht eingeschliffen und kann (auch bei höchstem Vaccuum) um denselben gedreht werden. In das Gefäss wird soweit concentrirte

1) An Stelle des grossen Schaumgefässes können für andere Zwecke kleinere Gefässe angesetzt werden.

Schwefelsäure eingegossen, dass dieselbe (in der Stellung des Gefässes *u*) das Rohr *d* gerade berührt. Wird das Gefäss um 180° gedreht (d. h. in die in Fig. 2 gestrichelt angegebene Lage *u'* gebracht), so taucht die Mündung des Rohres *d* einige Centimeter tief unter die Oberfläche der Schwefelsäure. Kurz bevor man nun das Blut in *v* einlässt, wird das Gefäss in die Lage *u'* gebracht. Jetzt müssen die Blutgase, ehe sie in die Pumpe *Q* gelangen, durch die Schwefelsäure hindurchstreichen und gelangen vollständig getrocknet in die Pumpenkugel *Q*. Nachdem nun die Tension der Blutgase so gering geworden ist, dass sie die kleine Flüssigkeitssäule in *u'* nicht mehr zu überwinden vermögen, wird *u'* um 180° gedreht und die Gase haben vollständig freien Zutritt zu der Pumpe. Das Rohr *d* ist unten etwas erweitert und abgeschrägt, damit nicht etwa ein capillar eingezogener Flüssigkeitstropfen dasselbe verstopfen könne. Das Gas wird durch diese Vorrichtung, welche sich sehr leicht entfernen und reinigen lässt, ausgezeichnet getrocknet und macht ein zweites, mit Phosphorsäureanhydrid gefülltes Gefäss für die meisten Zwecke vollständig entbehrlich.

Nachdem nun sämmtliches Gas aus dem Blute ausgepumpt und in den Raum *S* geschafft ist, wird es in das Eudiometer *Z* übergedrückt, wo ebenso verfahren wird, wie vorhin bei der Luftentleerung der Kugel *S* angegeben wurde.

Berlin, Phys. Inst. u. chem. Abth. d. Phys. Inst. d. Univ.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.